

**ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра «Сопротивление материалов»**

## **КУРС ЛЕКЦИЙ**

**По дисциплинам  
«Сопротивление материалов» и  
«Специальные вопросы сопротивления материалов»**

**(Часть III)**

**Учебное пособие**

**АВТОР**

**Еремин В.Д.**

**Ростов-на-Дону, 2021**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

**АННОТАЦИЯ**

Учебное пособие содержит материал для изучения обучающимися основных тем учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Специальные вопросы сопротивления материалов», для закрепления читаемого курса лекций, самостоятельного выполнения домашних, контрольных и расчетно-графических работ, подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной (итоговой) аттестации.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Специальные вопросы сопротивления материалов», «Механика», «Техническая механика», «Теоретическая механика для архитекторов», «Строительная механика для архитекторов», в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01 – Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Настоящее учебное пособие состоит из трех частей.

Содержание пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам высшего образования по техническим направлениям подготовки (специальностям), и «Примерной программе

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

дисциплины "Сопротивление материалов", Москва, 2012 год»,  
рекомендованной учебно-методическим объединением высших учебных  
заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

**Автор**

канд. техн. наук, профессор кафедры

«Сопротивление материалов» Еремин В.Д.

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
Тема 9. Сложное сопротивление.....	10
9.1. Общие понятия. Группы сложного сопротивления.....	10
9.2. Правила знаков для внутренних усилий при сложном сопротивлении.....	11
9.3. Косой изгиб.....	13
9.3.1. Вывод формулы нормальных напряжений при косом изгибе.....	13
9.3.2. Характер расположения нейтральной оси (нулевой линии) при косом изгибе.....	16
9.3.3. Условие прочности при косом изгибе.....	19
9.3.4. Определение деформаций при косом изгибе.....	21
9.4. Внецентренное растяжение или сжатие брусьев большой жесткости.....	25
9.4.1. Вывод формулы нормальных напряжений.....	25
9.4.2. Нейтральная ось (нулевая линия) при внецентренном растяжении или сжатии. Ее положение и свойства.....	28
9.4.3. Расчет на прочность стержней из пластичных и хрупких материалов.....	30
9.4.4. Ядро сечения. Построение ядра сечения.....	32
9.5. Совместное действие изгиба и центрального растяжения или сжатия.....	37
9.5.1. Расчет на прочность.....	37
9.6. Совместное действие изгиба и кручения .....	39

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

9.6.1. Напряжения при совместном действии изгиба и кручения круглого стержня.....	39
9.6.2. Применение теорий прочности к расчету круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.....	42
9.7. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сложное сопротивление».....	46
<b>Тема 10. Устойчивость центрально сжатых стержней.....</b>	<b>49</b>
10.1. Основные понятия.....	49
10.2. Потеря устойчивости положения.....	49
10.3. Потеря устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии.....	51
10.4. Продольный изгиб прямого стержня.....	52
10.5. Устойчивость деформированного состояния центрально сжатых стержней.....	55
10.5.1. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня.....	55
10.6. Расчет сжатых стержней на устойчивость. Форма изогнутой оси стержня.....	58
10.7. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы.....	61
10.8. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера.....	65
10.9. Расчет сжатых стержней на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба.....	68
10.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Устойчивость центрально сжатых стержней».....	71

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

<b>Тема 11. Задачи динамики в сопротивлении материалов.....</b>	<b>72</b>
11.1. Учет сил инерции. Коэффициент динамичности.....	72
11.2. Учет сил инерции при равноускоренном движении груза.....	74
11.3. Действие ударной нагрузки.....	76
11.3.1. Продольный удар.....	77
11.3.2. Поперечный (изгибающий) удар.....	81
11.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Динамическое действие нагрузки».....	84
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>85</b>
<b>Приложение.....</b>	<b>86</b>

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

**ПРЕДИСЛОВИЕ**

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, играет важную роль в профессиональной подготовке инженеров любой специальности.

Сопротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Самостоятельная работа обучающихся является одним из важнейших вопросов в условиях реализации компетентностной модели образования. Это связано не только с постоянным увеличением доли самостоятельной работы при освоении учебной дисциплины, но и с современным пониманием образования как жизненной стратегии личности.

Для усвоения материала этой дисциплины необходимо обязательно составлять конспект лекций и научиться самостоятельно решать задачи. Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями, а также обратиться за консультацией к преподавателю.

Необходимо также основательно разобраться в выводах основных выражений и формул, обращая при этом особое внимание на физическую сущность рассматриваемых вопросов и на допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на аудиторное изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Учебное пособие состоит из трех частей.

В первой части пособия анализируется напряженное состояние тела и излагаются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, испытывающих простые виды деформаций, по допускаемым напряжениям и предельным состояниям.

Во второй части учебного пособия рассматриваются методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций, работающих на изгиб.

В третьей части пособия рассматриваются вопросы расчета бруса на сложное сопротивление, на устойчивость, а также задачи учета динамических нагрузок в сопротивлении материалов.

Учебное пособие содержит материал для изучения студентами основных тем следующих учебных дисциплин кафедры:

- сопротивление материалов;
- специальные вопросы сопротивления материалов;
- механика;
- строительная механика для архитекторов;
- теоретическая механика для архитекторов.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения (очной, очно-заочной, заочной) технических направлений подготовки (специальностей), в частности, для студентов, обучающихся по направлениям: 08.03.01 – Строительство; 07.03.01 – Архитектура; 07.03.02 – Реконструкция и реставрация архитектурного наследия; 07.03.04 – Градостроительство; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 29.03.04 – Технология художественной обработки материалов и специальностям: 08.05.01



**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

– Строительство уникальных зданий; 08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей; 21.05.01 – Прикладная геодезия; 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, для закрепления читаемого курса лекций, для подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся, при самостоятельном выполнении домашних, контрольных и расчетно-графических работ.

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

ТЕМА 9. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

9.1. Общие понятия. Группы сложного сопротивления

На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия внешней нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно возникает несколько компонентов внутренних усилий.

В этом случае говорят, что брус находится в условиях сложного сопротивления.

Определение. К сложному сопротивлению относятся такие виды деформаций бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов.

В этих случаях создаются комбинации простых видов деформаций: кривой изгиб /плоский изгиб в двух плоскостях одновременно/, внецентренное растяжение или сжатие /центральное растяжение или сжатие с плоским изгибом/, одновременное действие плоского изгиба с кручением и так далее.

В общем случае нагружения бруса в поперечных сечениях могут действовать шесть внутренних силовых факторов  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_k$ , связанные с четырьмя простыми деформациями – центральным растяжением (сжатием), сдвигом, плоским (чистым) изгибом и кручением.

Совместное действие указанных усилий приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных каждой простой деформацией в отдельности.

Случаи сложного сопротивления можно разделить на две группы.

К первой группе относятся случаи, при которых в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным, либо приближенно рассматривается как одноосное в связи с незначительным влиянием на прочность касательных напряжений.

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

К первой группе принадлежат кривой изгиб, внецентренное растяжение (сжатие), совместное действие изгиба и центрального растяжения (сжатия).

*В этом случае для расчета на прочность применяют принцип независимости действия сил.*

В случаях сложного сопротивления, относящихся ко второй группе, в опасных точках бруса возникает плоское напряженное состояние и расчет на прочность, выполняется с применением теорий прочности, так как в этом случае принцип независимости действия сил применять нельзя.

Ко второй группе относятся изгиб с кручением, центральное растяжение (сжатие) с кручением, центральное растяжение (сжатие) с изгибом и кручением.

В случае применения принципа независимости действия сил, в расчетах на сложное сопротивление условимся относительно правила знаков.

#### 9.2. Правила знаков для внутренних усилий при сложном сопротивлении

Правило знаков. Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растягивающие напряжения в точках первой четверти принятой системы координат поперечного сечения бруса (стержня) (рис. 9.1, а).

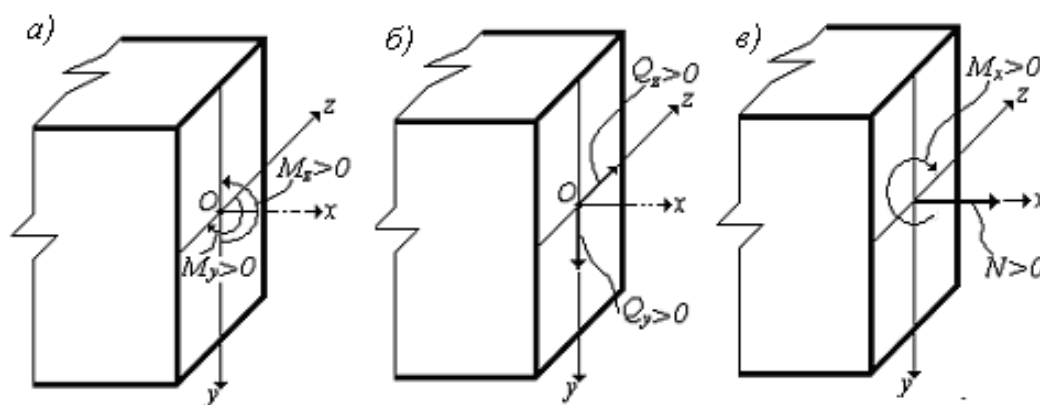


Рис.9.1

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Правило знаков. На площадке, нормаль к которой совпадает с положительным направлением оси  $x$  (рис. 9.1, б), поперечная сила считается положительной, если она направлена в сторону положительного направления соответствующей оси.

Правило знаков. Продольная сила считается положительной, если она растягивающая (рис. 9.1, в).

Правило знаков. Крутящий момент считается положительным, если он направлен по часовой стрелке (рис. 9.1, в).

Основные формулы для определения напряжений, соответствующие принятым направлениям осей координат, при простых видах деформирования бруса (стержня), как известно, имеют вид:

- Центральное растяжение или сжатие

$$\sigma_x = \sigma = N / A \quad (9.1)$$

- Кручение круглого стержня

$$\tau_\rho = M_k \rho / I_\rho \quad (9.2)$$

- Плоский (чистый) поперечный изгиб:

– в плоскости  $xOy$

$$\sigma_x = \sigma = M_z y / I_z \quad (9.3)$$

– в плоскости  $xOz$

$$\sigma_x = \sigma = M_y z / I_y \quad (9.4)$$

При расчетах на сложное сопротивление (*первая группа*) обычно исходят из принципа независимости действия сил (влиянием деформаций, вызванных одной из приложенных к упругой системе нагрузок, на расположение, и, следовательно, на результаты действия остальных нагрузок пренебрегают), который справедлив при малых деформациях.

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

*Принцип независимости действия сил позволяет применять способ сложения действия сил.*

В общем случае сложного сопротивления, формула для нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma = N / A + M_z y / I_z + M_y z / I_y \quad (9.5)$$

### 9.3. Косой изгиб

#### 9.3.1. Вывод формулы нормальных напряжений при косом изгибе

До сих пор мы рассматривали плоский (чистый) поперечный изгиб, когда плоскость действия нагрузок (силовая плоскость) совпадала с одной из главных центральных осей инерции. Деформация балки при этом происходила в плоскости действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении балки, а нейтральная ось совпадала с главной осью инерции и была перпендикулярна к силовой плоскости.

Определение. Изгиб называется косым, если плоскость действия суммарного изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении балки, не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции  $x O y$  или  $x O z$  (рис. 9.2)

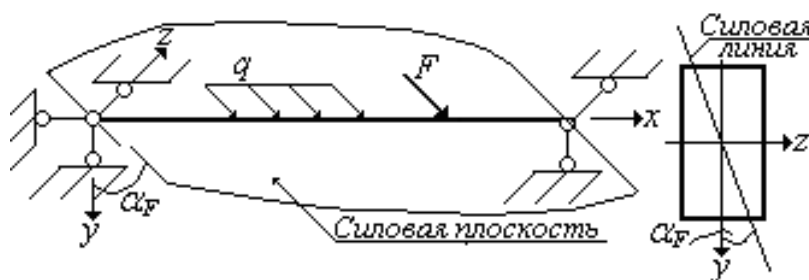


Рис. 9.2

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

При косом изгибе нейтральная ось (нулевая линия), в отличие от плоского поперечного изгиба, лежит в плоскости, не совпадающей с перпендикуляром к силовой плоскости.

Различают два вида косоугольного изгиба *плоский и пространственный*.

При плоском косоугольном изгибе внешние силы действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции. Эта плоскость называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – *силовой линией*.

При пространственном косоугольном изгибе внешние силы действуют в разных плоскостях.

Обозначим через  $\alpha_F$  угол между силовой линией и главной вертикальной осью  $y$  (рис. 9.2).

Правило знаков. Угол  $\alpha_F$  будем считать положительным при повороте силовой линии от оси  $y$  против часовой стрелки.

Как в случае пространственного, так и в случае плоского косоугольного изгиба, наиболее целесообразно их приводить к двум плоским прямым изгибам.

Таким образом, косоугольный изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских поперечных изгибов, вызванных изгибающими моментами относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения, то есть суммарный изгибающий момент  $M$ , действующий в сечении балки, можно разложить на два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$ , действующих в главных плоскостях инерции

$$M_y = M \cdot \sin \alpha_F; \quad M_z = M \cdot \cos \alpha_F, \quad (9.6)$$

где

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad - \quad \text{суммарный изгибающий момент в рассматриваемом}$$

поперечном сечении бруса.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Отсюда, угол  $\alpha_F$  можно выразить через отношение изгибающих моментов

$$\operatorname{tg} \alpha_F = M_y / M_z. \quad (9.7)$$

Если изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  имеют одинаковые знаки, то угол  $\alpha_F$  положителен. В этом случае силовая линия проходит через первую и третью четверти плоскости  $y O z$ .

При плоском косом изгибе внутренние усилия  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  определяются одними и теми же нагрузками, действующими в силовой плоскости, следовательно, являются зависимыми. При этом угол  $\alpha_F$  не меняется по длине балки.

При пространственном изгибе внутренние усилия имеют различные законы изменения по длине балки, так как определяются от нагрузок, действующих в разных плоскостях. При этом угол  $\alpha_F$  также изменяется по длине балки.

Для определения напряжений от каждого момента в отдельности можно воспользоваться формулами (9.3 и 9.4), полученными для плоского поперечного изгиба.

Используя принцип независимости действия сил, можно написать общую формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе

$$\sigma = M_z y / I_z + M_y z / I_y, \quad (9.8)$$

или с учетом (9.6)

$$\sigma = M \cdot \left( \frac{y \cdot \cos \alpha_F}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha_F}{I_y} \right) \quad (9.9)$$

По формулам (9.8 и 9.9) можно определить нормальное напряжение при косом изгибе в произвольной точке поперечного сечения балки с координатами  $y$  и  $z$ .

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

При косом изгибе нормальные напряжения  $\sigma$  изменяются по линейному закону.

Если в этих формулах учитывать знаки изгибающего момента  $M$  и координат  $y$  и  $z$ , то формулы позволяют определять не только численное значение нормального напряжения  $\sigma$ , но и его знак.

Правило знаков. Изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти принятой системы координат поперечного сечения балки (рис. 9.1, а).

Для нахождения наибольших напряжений нужно знать координаты опасных точек. Для этого необходимо вначале установить положение нейтральной оси (нулевой линии), а затем точки, наиболее удаленные от этой линии.

**9.3.2. Характер и положение нейтральной оси (нулевой линии) при косом изгибе**

Положение нейтральной оси (нулевой линии) при косом изгибе можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

Обозначим текущие координаты нулевой линии через  $y_0$  и  $z_0$ . (рис. 9.3).

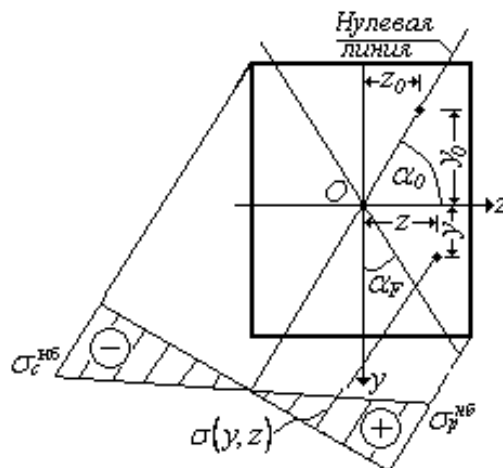


Рис. 9.3



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Тогда, применяя формулу (9.8), получим

$$\sigma = M_z \cdot y_0 / I_z + M_y \cdot z_0 / I_y = 0$$

откуда находим

$$-\frac{y_0}{z_0} = \frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z}$$

или

$$\frac{y_0}{z_0} = -\frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z}$$

Обозначая угол наклона нейтральной оси (нулевой линии) к горизонтальной главной оси  $z$  через  $\alpha_0$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z}.$$

Следовательно, учитывая (9.7)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha_F \quad (9.10)$$

Мы получили уравнение нейтральной оси (нулевой линии) при косом изгибе в виде уравнения прямой, проходящей через начало координат.

Знак минус в полученной формуле указывает на то, что нулевая линия по отношению к силовой линии проходит через две другие четверти осей координат.

Правило знаков. Угол  $\alpha_0$  откладывается от горизонтальной главной оси  $z$  в ту же сторону, что и угол  $\alpha_F$  от вертикальной главной оси  $y$ .

Анализируя формулу нейтральной оси (нулевой линии) при косом изгибе (9.10) находим, что в отличие от плоского поперечного изгиба при косом изгибе (плоском или пространственном) нулевая и силовая линии в общем случае (когда  $I_y \neq I_z$ ) не будут взаимно перпендикулярны.

Углы между этими линиями тем больше отличаются друг от друга, чем больше разница между двумя главными моментами инерции.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Так, например, в прямоугольном сечении  $I_z > I_y$ , следовательно,  $\alpha_0 > \alpha_F$ . Это означает, что нейтральная ось (нулевая линия) отклоняется от перпендикуляра к силовой плоскости в сторону той главной центральной оси инерции поперечного сечения балки, относительно которой момент инерции имеет меньшее значение (рис. 9.3).

Нулевая линия будет перпендикулярна силовой только при  $I_z = I_y$ , то есть, когда главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки одинаковы. Но в этом случае, как известно, любые центральные оси сечения являются главными.

Следовательно, для поперечных сечений балки, у которых  $I_z = I_y$  (круглое сечение, правильный многоугольник, квадратное сечение и т.д.) явление косого изгиба получить нельзя.

Из формулы (9.10) также следует, что положение нулевой линии не зависит от величины изгибающего момента.

В общем случае сложного (пространственного) изгиба углы наклона нулевых линий вдоль оси балки не остаются постоянными, а изменяются в соответствии с изменением соотношения величин изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ , как это следует из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z}.$$

*Следовательно, в общем случае сложного (пространственного) изгиба изогнутая ось балки представляет собой пространственную кривую.*

При плоском косом изгибе отношение изгибающих моментов  $\frac{M_y}{M_z} = \operatorname{tg} \alpha_F$  постоянно по длине балки, поэтому из выражения 9.10 следует, что угол  $\alpha_0$  также постоянен.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

9.3.3. Условие прочности при косом изгибе

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (опасные точки).

Для поперечных сечений балки типа прямоугольника или двутавра, имеющих две оси симметрии, наибольшие по абсолютной величине напряжения целесообразно вычислять по формуле

$$\sigma_{нб} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \quad (9.11)$$

На рис. 9.3 показан вид эпюры нормальных напряжений для прямоугольного сечения при положительных значениях  $M_y$  и  $M_z$ .

В этом случае наибольшие растягивающие  $\sigma_p^{нб}$  и сжимающие  $\sigma_c^{нб}$  напряжения возникают в двух угловых точках сечения (опасные точки).

Условие прочности по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* при косом изгибе, для балок с рассмотренным типом поперечных сечений, имеет вид

$$\sigma_{нб} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.12)$$

а в случае произвольного поперечного сечения

$$\sigma_{нб} = \left| \frac{M_y}{I_y} z_{нб} + \frac{M_z}{I_z} y_{нб} \right| \leq [\sigma]. \quad (9.13)$$

При пространственном изгибе положение опасного сечения не всегда является очевидным, так как изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  возникают от действия различных нагрузок и не зависят друг от друга.

Следовательно, в этих случаях необходимо проверять прочность в нескольких сечениях балки, где  $M_y$  и  $M_z$  имеют наибольшие значения.

Величина допускаемых напряжений  $[\sigma]$  назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка. Для хрупкого материала в качестве

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$[\sigma]$  необходимо принимать допускаемое напряжение на растяжение.

Пользуясь условием прочности при косом изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (9.12 или 9.13) можно решать применительно к косому изгибу известные нам три типа задач:

1). Проектный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ . По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент  $M$  (по эпюре изгибающих моментов).

Подбор сечений при косом изгибе является задачей более сложной, чем при плоском поперечном изгибе.

Условие прочности (9.12) принимает вид

$$\sigma_{нб} = \frac{|M \sin \alpha_F|}{W_y} + \frac{|M \cos \alpha_F|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.14)$$

или

$$\sigma_{нб} = \frac{M}{W_z} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right) \leq [\sigma]. \quad (9.15)$$

Из условия прочности (9.15) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формуле

$$W_z \geq \frac{|M|}{[\sigma]} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right). \quad (9.16)$$

Необходимо сначала задаться отношением  $W_z / W_y$ , а затем находить сечение методом подбора.

Например, для прямоугольного сечения

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{b \cdot h^2 \cdot 6}{6 \cdot h \cdot b^2} = \frac{h}{b}.$$

2). Определение допускаемой нагрузки (несущей способности). В этом случае известны размеры поперечного сечения ( $W_z$  и  $W_y$ ) и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ .

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Из условия прочности (9.15) находят наибольшую допускаемую величину изгибающего момента:

$$|M_{нб}| \leq \frac{W_z \cdot [\sigma]}{\left(\frac{W_z}{W_y}\right) |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F}. \quad (9.17)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента  $|M_{нб}|$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3). Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения ( $W_z$  и  $W_y$ ) и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ .

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением, то есть проверить выполнение условия прочности (9.15)

$$\sigma_{нб} = \frac{M}{W_z} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right) \leq [\sigma].$$

**9.3.4. Определение деформаций при косом изгибе**

Для определения прогибов в балке, работающей на косой изгиб, снова воспользуемся принципом независимости действия сил.

Так как косой изгиб представляет собой сочетание двух плоских поперечных изгибов, то перемещения в балках при косом изгибе могут определяться теми же методами, что и при плоском изгибе.

Для этого необходимо действующие на балку нагрузки разложить на составляющие, параллельные главным осям  $y$  и  $z$ , и определить по отдельности прогибы  $v$  и  $w$  по направлениям этих осей (рис. 9.4).

Полный (суммарный) прогиб в произвольном сечении балки можно найти как геометрическую сумму прогибов, вызванных составляющими силами (рис. 9.4)

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (9.18)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

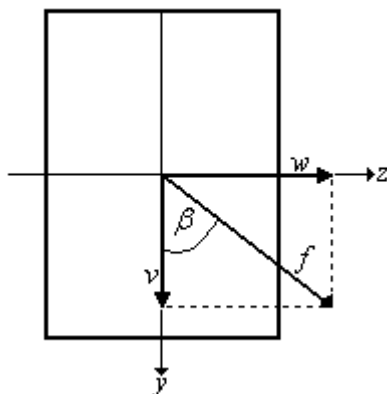


Рис. 9.4

Угол  $\beta$  между направлением суммарного прогиба (плоскость деформации)  $f$  и вертикальной главной осью  $y$ , будет равен (рис. 9.4)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v} \quad (9.19)$$

Аналогично могут быть найдены и углы поворота сечений балки.

Определим прогибы для балки длиной  $l$  с заделанным концом, на другом конце которой приложена внешняя сосредоточенная сила  $F$  под углом  $\alpha_F$  к вертикальной главной оси  $y$  (рис.9.5)

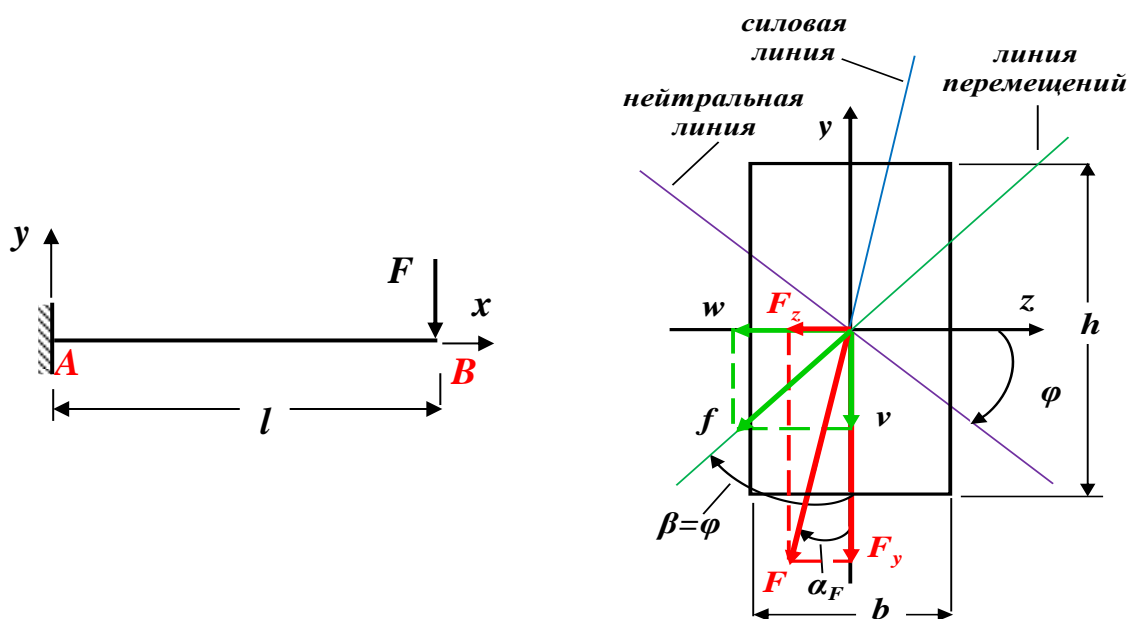


Рис. 9.5

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Как известно, величину прогиба  $f$  на свободном конце жестко зашеченной балки длиной  $\ell$  по оси  $y$  от внешней силы  $F$  при плоском поперечном изгибе (рис. 9.6) можно вычислить по табличной формуле (см. справочные таблицы)

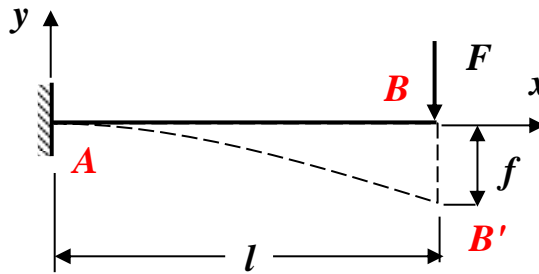


Рис. 9.6

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{3EI_z} \quad (9.20)$$

Разложив внешнюю силу  $F$  на две составляющие  $F_z$  и  $F_y$ , найдем отдельно по формуле (9.20) прогибы  $w$  и  $v$  от этих составляющих.

От составляющей силы  $F_y = F \cdot \cos \alpha$  прогиб  $v$  на свободном конце балки по оси  $y$  равен

$$v = \frac{F_y \cdot \ell^3}{3EI_z} = \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot \ell^3}{3EI_z} \quad (9.21)$$

Прогиб  $w$  на том же конце балки от составляющей силы  $F_z = F \cdot \sin \alpha$  направлен по оси  $z$  и равен

$$w = \frac{F_z \cdot \ell^3}{3EI_y} = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot \ell^3}{3EI_y} \quad (9.22)$$

Полный (суммарный) прогиб  $f$  в этом сечении балки можно найти как геометрическую сумму прогибов, вызванных составляющими силами  $F_y$  и  $F_z$ , (9.18)

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Установим направление суммарного перемещения (плоскости деформации) при косом изгибе.

При плоском косом изгибе его изогнутая ось (плоскость деформации), представляет собой плоскую кривую, расположенную, однако, не в плоскости действия сил (силовой плоскости).

Определим значение угла  $\beta$  наклона этого перемещения (плоскости деформации) к вертикальной главной оси  $y$  (рис. 9.5)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v} = \frac{F_z \cdot I_z}{F_y \cdot I_y} = \frac{F \cdot I_z \cdot \sin \alpha_F}{F \cdot I_y \cdot \cos \alpha_F} = \frac{I_z \cdot \sin \alpha_F}{I_y \cdot \cos \alpha_F} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F$$

Таким образом

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F \quad (9.23)$$

Эта формула идентична с формулой (9.10) для определения положения нейтральной оси при косом изгибе, то есть

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \beta$$

или

$$\alpha_0 = \beta.$$

Следовательно, *при плоском косом изгибе полный прогиб  $f$  направлен перпендикулярно к нейтральной (нулевой линии), а изогнутая ось балки не лежит в силовой плоскости (рис. 9.5).*

Отклонение полного прогиба от силовой плоскости будет тем больше, чем больше отношение  $I_z / I_y$ .

*Таким образом, при косом изгибе плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью, а значительно отклоняется от нее в сторону плоскости наименьшей жесткости балки.*

Это обстоятельство объясняет, почему такой изгиб называется косым.



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Когда  $I_y = I_z$  (круглое сечение, правильный многоугольник и т.д.) полный прогиб (плоскость деформации) лежит в силовой плоскости. В этих случаях кривой изгиб невозможен.

**9.4. Внецентренное растяжение или сжатие  
брусев большой жесткости**

**9.4.1. Вывод формулы нормальных напряжений**

Многие элементы строительных конструкций (колонны, стойки, массивные опоры мостов и др.) находятся под воздействием внешних сжимающих сил, приложенных вне центра тяжести сечения. Например, балка перекрытия, опирающаяся на колонну, передает нагрузку с эксцентриситетом  $e$  и, следовательно, в произвольном сечении I-I колонны возникает продольная сила  $N = F$  и изгибающий момент, равный  $M = F \cdot e$  (рис. 9.7).

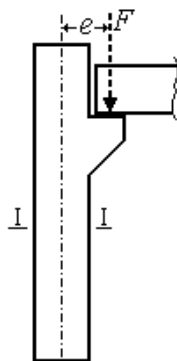


Рис. 9.7

Внецентренное растяжение (сжатие) стержня представляет собой такой вид деформации, при котором равнодействующая внешних сил действует вдоль прямой, параллельной геометрической оси стержня, и приложена вне центра тяжести поперечного сечения.

В произвольном поперечном сечении стержня при этом одновременно возникают продольная (растягивающая или сжимающая) сила и изгибающий момент, плоскость действия которого не совпадает ни с одной из главных

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

плоскостей инерции сечения. В поперечном сечении стержня может действовать также и поперечная сила.

Внецентренно растянутый или сжатый стержень, при расчете которого можно не учитывать дополнительные изгибающие моменты, равные произведениям продольных внешних сил  $F$  на прогибы  $v$ , называются *жесткими*, а стержень, при расчете которого их необходимо учитывать – *гибкими*.

Пусть на стержень произвольного сечения действует одна внешняя сила  $F$ , параллельная его продольной оси (рис. 9.8).

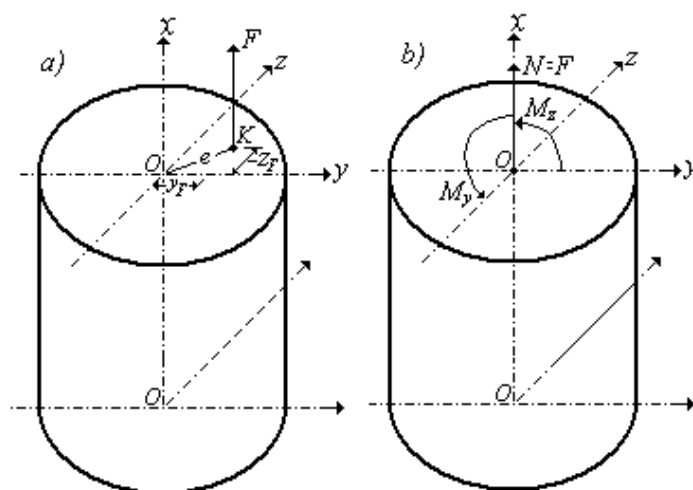


Рис. 9.8

Координаты точки приложения силы относительно главных центральных осей обозначим через  $y_F$  и  $z_F$ , а расстояние этой точки до центра тяжести сечения, называемое эксцентриситетом, – через  $e$ .

Как известно из теоретической механики, для любого поперечного сечения действие внецентренно приложенной силы  $F$  можно заменить действием нормальной силы  $N = F$ , приложенной в центре тяжести сечения, и действием двух изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  (правило параллельного переноса силы).

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Таким образом, напряжения в произвольной точке сечения будут складываться из напряжений центрального растяжения от продольной силы  $N = F$  и напряжений чистого изгиба от изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ .

Используя принцип независимости действия сил, можно написать общую формулу для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии) стержня

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (9.24)$$

При этом

$$M_z = F \cdot y_F, \quad M_y = F \cdot z_F, \quad N = F, \quad I_y = A \cdot i_y^2, \quad I_z = A \cdot i_z^2 \quad (9.25)$$

Преобразуем формулу (9.24), подставляя значения (9.25)

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \quad (9.26)$$

По формуле (9.26) можно определить нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения стержня с координатами  $y$  и  $z$  при внецентренном растяжении (сжатии).

Следовательно, формула для определения напряжений при внецентренном растяжении принимает вид ( $N = + F$ )

$$\sigma = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \quad (9.27)$$

При внецентренном сжатии ( $N = - F$ ), соответственно

$$\sigma = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \quad (9.28)$$

Для нахождения наибольших напряжений нужно знать координаты опасных точек. Для этого необходимо вначале установить положение нейтральной оси (нулевой линии), а затем точки, наиболее удаленные от этой линии.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

**9.4.2. Нейтральная ось (нулевая линия) при внецентренном растяжении или сжатии. Ее положение и свойства**

Положение нейтральной оси (нулевой линии) при внецентренном растяжении или сжатии можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

Обозначим текущие координаты нулевой линии через  $y_0$  и  $z_0$  (рис. 9.9).



Рис. 9.9

Если эти координаты подставить в уравнение (9.26) и учесть, что напряжения в точках нейтральной оси (нулевой линии) равны нулю, то после сокращения на величину  $N/A$  получим уравнение нейтральной оси

$$\left(1 + \frac{y_F}{i_z^2} \cdot y_0 + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot z_0\right) = 0 \quad (9.29)$$

По этому уравнению можно определить отрезки, отсекаемые нейтральной осью (нулевой линией) на осях координат.

Обозначим эти отрезки по осям  $z$  и  $y$  (рис. 9.9) соответственно через  $a_z$  и  $a_y$ .

Полагая в этом уравнении  $z_0 = 0$ ,  $y_0 = a_y$ , получим

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$1 + \frac{y_F}{i_z^2} \cdot a_y = 0$$

Точно также для случая  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = a_z$  имеем

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} \cdot a_z = 0$$

Решая эти уравнения, получим отрезки, отсекаемые нейтральной осью (нулевой линией) на осях координат, при внецентренном растяжении или сжатии

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} \quad (9.30)$$

Вместе с тем можно решить и обратную задачу, выразив координаты точки приложения силы  $F$  при заданных отрезках, отсекаемых нейтральной осью на осях координат

$$y_F = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_F = -\frac{i_y^2}{a_z} \quad (9.31)$$

Отметим зависимость величин  $y_F$  и  $a_y$ , а также  $z_F$  и  $a_z$ .

*Если силу  $F$  приложить в точке с координатами  $a_z$  и  $a_y$ , то нейтральная ось отсечет отрезки на осях координат, равные соответственно  $z_F$  и  $y_F$ .*

#### Свойства нейтральной оси (нулевой линии) при внецентренном растяжении (сжатии)

Отметим интересные зависимости между положением нейтральной оси и соответствующей ей точкой приложения внешней силы  $F$ :

а) точка приложения силы  $F$  (полюс) и соответствующая ей нейтральная ось (нулевая линия) находятся по разные стороны от центра тяжести сечения, то есть нейтральная ось (нулевая линия) пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы  $F$ ;

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

- б) при приближении точки приложения силы  $F$  к центру тяжести сечения, нейтральная ось (нулевая линия) удаляется от него;
- в) при удалении точки приложения силы  $F$  от центра тяжести сечения, нейтральная ось (нулевая линия) приближается к нему;
- г) положение нейтральной оси (нулевой линии) не зависит от величины силы  $F$ ;
- д) если точка приложения силы располагается на одной из главных центральных осей сечения, то нейтральная ось (нулевая линия) будет перпендикулярна этой оси;
- е) при внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная ось (нулевая линия) может пересекать поперечное сечение стержня (две опасные точки) или находиться за его пределами (одна опасная точка);
- ж) при вращении нейтральной оси вокруг какой-либо точки поперечного сечения стержня, точка приложения внецентренной силы  $F$  перемещается по прямой линии (*лемма*).

Для определения положения опасных точек в сечении следует параллельно нейтральной оси (нулевой линии) провести касательные к контуру сечения.

Таким путем находят точки сечения, расположенные по обе стороны от нулевой линии и наиболее удаленные от нее, которые и будут опасными.

В нашем примере нейтральная ось (нулевая линия) пересекает поперечное сечение стержня, поэтому имеем две опасные точки – это точки  $1$  и  $2$ , находящиеся в растянутой и сжатой зонах (рис. 9.9).

**9.4.3. Расчет на прочность стержней из пластичных  
и хрупких материалов**

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения стержня, наиболее удаленных от нулевой линии (опасные точки).

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Условие прочности по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* при внецентренном растяжении (сжатии) имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \leq [\sigma] \quad (9.32)$$

Формула справедлива в случае действия сжимающей силы  $F$ , если нет опасности возникновения продольного изгиба (потери устойчивости).

Расчет на прочность бруса, сжатого или растянутого внецентренно приложенными продольными внешними силами (то есть при отсутствии поперечных сил), проводится наиболее просто, так как в этом случае внутренние усилия одинаковы во всех поперечных сечениях каждого участка стержня. Для стержня с постоянными размерами сечения в пределах каждого участка все сечения являются равно опасными. Для стержня с переменными поперечными размерами опасным в пределах каждого участка является сечение наименьшего размера.

При наличии в поперечных сечениях стержня поперечных сил, изгибающие моменты непрерывно изменяются по длине стержня. В связи с этим, определение опасного сечения становится более сложным. Обычно в таких случаях проводят проверку прочности, определяя нормальные напряжения в ряде сечений и сопоставляя их с допускаемыми напряжениями.

При пластическом материале для проверки прочности достаточно определить напряжения в точке с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением.

При хрупком материале необходимо определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

Пользуясь условием прочности при внецентренном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (9.32)

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

можно решать применительно к внецентренному растяжению (сжатию) известные нам три типа задач:

1). Проектный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка  $F$  и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ .

Подбор сечений при внецентренном растяжении (сжатии) является задачей более сложной, чем при центральном растяжении (сжатии).

2). Определение допускаемой нагрузки (несущей способности). В этом случае известны размеры поперечного сечения и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ .

Из условия прочности (9.32) находят наибольшую допускаемую величину продольной силы  $[N]$ .

По найденному допускаемому значению продольной силы  $[N]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки  $[F]$ .

3). Проверочный расчет. В этом случае известны внешняя нагрузка  $F$ , размеры поперечного сечения и материал элементов конструкции  $[\sigma]$ .

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением, то есть проверить выполнение условия прочности (9.32)

**9.4.4. Ядро сечения. Построение ядра сечения**

Нейтральная ось (нулевая линия) в общем случае при внецентренном растяжении (сжатии) может проходить и вне сечения.

Действительно, если сила  $F$  приложена в центре тяжести сечения, то нулевая линия проходит в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределены по сечению *равномерно* (центральное растяжение или сжатие).

По мере увеличения координат точки приложения силы, нулевая линия будет приближаться к сечению и при некотором положении точки приложения



---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

внешней силы впервые коснется контура сечения. При дальнейшем увеличении эксцентриситета нейтральная линия пересечет сечение. При этом нормальные напряжения в сечении будут растягивающие и сжимающие.

Представляет интерес найти такую область расположения точек приложения силы  $F$ , при которых в поперечном сечении стержня напряжения будут одного знака.

Это важно для стержней плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, кирпичная кладка, чугун). Для конструкций из таких материалов предпочтительно, чтобы при внецентренном сжатии  $\sigma \leq 0$ , то есть, чтобы нулевая линия не пересекала контур поперечного сечения.

Для этого необходимо, чтобы  $y_F$  и  $z_F$  не были бы слишком большими, а это означает, что точка приложения силы должна быть в области близкой к началу координат (центру тяжести поперечного сечения).

Такая область называется *ядром сечения*.

Определение. Ядром сечения называется выпуклая, замкнутая область, расположенная вокруг центра тяжести сечения, все точки которой обладают свойством: если точка приложения внецентренной силы попадает на границу, либо во внутрь ядра сечения, тогда во всех точках поперечного сечения нормальные напряжения будут одного знака.

Ядро сечения является выпуклой фигурой, поскольку нейтральные оси должны касаться контура фигуры и не пересекать его.

Зная форму и размеры ядра сечения, можно, не вычисляя величину напряжений, по эксцентриситету сжимающей силы устанавливать, возникнут в поперечном сечении растягивающие напряжения или нет.

Для построения ядра сечения необходимо обкатать поперечное сечение стержня нейтральными линиями, касательными к сечению, при этом координаты вершин ядра сечения вычисляются по формулам (9.31)

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$y_{я} = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_{я} = -\frac{i_y^2}{a_z}, \quad (9.33)$$

где

$y_{я}$  и  $z_{я}$  – координаты вершин ядра сечения.

При построении ядра сечения применяется лемма, которая показывает, как соединяются между собой вершины ядра сечения.

Лемма. При вращении нейтральной оси вокруг какой-либо точки поперечного сечения стержня, соответствующая точка приложения внецентренной силы  $F$  перемещается вдоль некоторой вполне определенной прямой.

Построим ядро сечения для прямоугольного поперечного сечения стержня, имеющего основание  $b$  и высоту  $h$  (рис. 9.10).

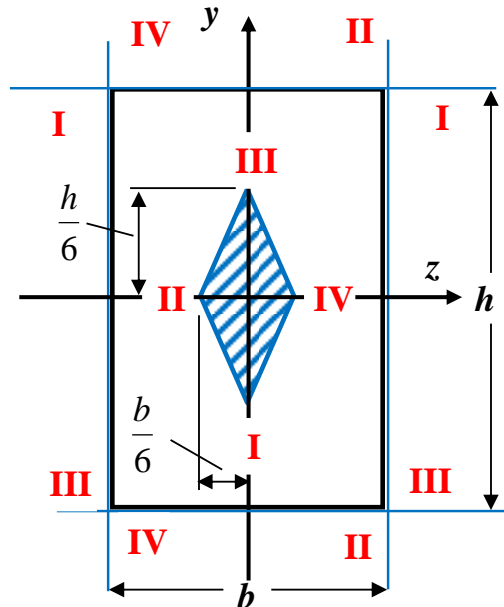


Рис. 9.10

Вычислим геометрические характеристики для прямоугольного поперечного сечения стержня

$$A = b \cdot h; \quad I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{bh} = \frac{b^2}{12}$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Обкатаем по ходу часовой стрелки поперечное сечение стержня касательными нейтральными осями I–I, II–II, III–III и IV–IV, соответствующие их предельному положению. Это будут касательные, совмещенные со сторонами прямоугольника.

Пронумеруем их в последовательном порядке. Для каждой из этих касательных нейтральных осей по формуле (9.32) найдем соответствующую ей точку приложения силы (вершину ядра сечения).

Полученные точки соединим одну с другой в том же порядке, в каком пронумерованы касательные нейтральные оси. Полученный контур и ограничивает ядро сечения.

Нейтральная ось I–I. Для касательной I–I отрезки, отсекаемые на осях координат, будут равны

$$a_z^{I-I} = \infty; \quad a_y^{I-I} = +\frac{h}{2}.$$

Координаты вершины ядра сечения, соответствующей касательной I–I, определим по формуле (9.32)

$$y_{\text{я}}^I = -\frac{i_z^2}{a_y^{I-I}} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{+\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}; \quad z_{\text{я}}^I = -\frac{i_y^2}{a_z^{I-I}} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\infty} = 0.$$

Нейтральная ось II–II. Для касательной II–II отрезки, отсекаемые на осях координат, будут равны

$$a_z^{II-II} = +\frac{b}{2}; \quad a_y^{II-II} = \infty.$$

Координаты вершины ядра сечения, соответствующей касательной II–II, определим по формуле (9.32)

$$y_{\text{я}}^{II} = -\frac{i_z^2}{a_y^{II-II}} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\infty} = 0; \quad z_{\text{я}}^{II} = -\frac{i_y^2}{a_z^{II-II}} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{+\frac{b}{2}} = -\frac{b}{6}.$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Нейтральная ось III-III. Для касательной III–III отрезки, отсекаемые на осях координат, будут равны

$$a_z^{III-III} = \infty; \quad a_y^{III-III} = -\frac{h}{2}.$$

Координаты вершины ядра сечения, соответствующей касательной III–III, определим по формуле (9.32)

$$y_{я}^{III} = -\frac{i_z^2}{a_y^{III-III}} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{-\frac{h}{2}} = +\frac{h}{6}; \quad z_{я}^{III} = -\frac{i_y^2}{a_z^{III-III}} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\infty} = 0.$$

Нейтральная ось IV-IV. Для касательной IV–IV отрезки, отсекаемые на осях координат, будут равны

$$a_z^{IV-IV} = -\frac{b}{2}; \quad a_y^{IV-IV} = \infty.$$

Координаты вершины ядра сечения, соответствующей касательной IV–IV, определим по формуле (9.32)

$$y_{я}^{IV} = -\frac{i_z^2}{a_y^{IV-IV}} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{\infty} = 0; \quad z_{я}^{IV} = -\frac{i_y^2}{a_z^{IV-IV}} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{-\frac{b}{2}} = +\frac{b}{6}.$$

По полученным координатам вершин ядра сечения, соответствующих касательным I-I ÷ IV-IV, строим ядро сечения. Для этого полученные точки I ÷ IV соединяем отрезками прямой одну с другой по ходу часовой стрелки, как были пронумерованы касательные нейтральные оси. Полученный контур и ограничивает ядро сечения. Таким образом, ядро сечения для прямоугольного поперечного сечения будет иметь вид ромба (рис. 9.10).

При построении ядра сечения можно использовать симметричность поперечного сечения стержня.

*Описанный способ построения ядра сечения называется методом обкатки поперечного сечения стержня касательными нейтральными осями.*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

**9.5. Совместное действие изгиба и центрального  
растяжения или сжатия**

**9.5.1. Расчет на прочность**

На практике часто встречаются случаи, когда на стержень действуют одновременно поперечные и продольные нагрузки. При этом продольные нагрузки могут быть приложены внецентренно.

Определение. Если на балку действуют силы, пересекающие ее ось, но не лежащие ни в одной из главных плоскостей или лежащие в разных плоскостях инерции, то мы имеем сложный (косой) изгиб с центральным растяжением или сжатием.

Следовательно, в общем случае в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  в двух плоскостях, поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , а также продольная сила  $N$  (рис 9.11).

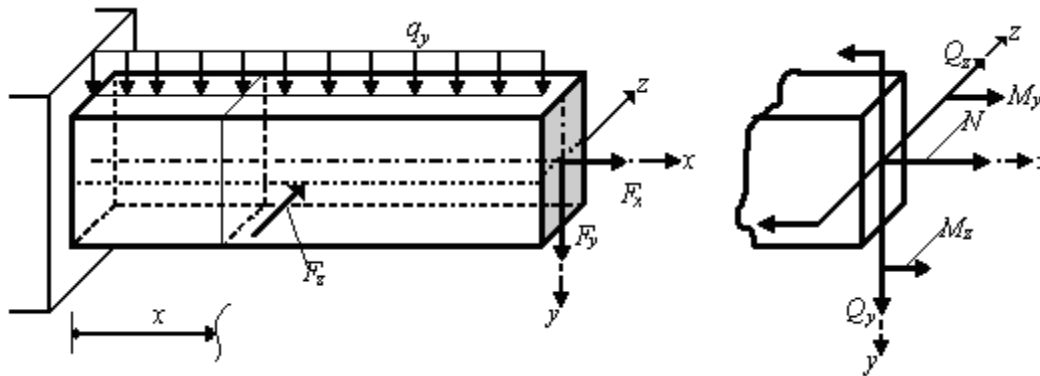


Рис. 9.11

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что напряженное состояние в опасной точке будет линейным.

Применяя принцип независимости действия сил, получим формулу для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения бруса с координатами  $y$  и  $z$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (9.34)$$

Если в этой формуле учитывать знаки внутренних усилий и координат  $y$  и  $z$  точки, в которой вычисляют напряжения, то она позволяет определять не только численное значение нормального напряжения  $\sigma$ , но и его знак.

Правило знаков. Изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти поперечного сечения балки (рис. 9.1, а).

Правило знаков. Продольная сила  $N$  считается положительной, если она растягивающая (рис. 9.1, в).

Условие прочности по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений при совместном действии изгиба и центрального растяжения или сжатия имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9.35)$$

В случае плоского изгиба только в главной плоскости  $xOy$  с растяжением (сжатием) трех членная формула превращается в двух членную

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (9.36)$$

Эти формулы применяют при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. Опасными в этом случае являются те сечения, где действует наибольший изгибающий момент.

Для нахождения наибольших напряжений нужно знать координаты опасных точек. Для этого необходимо вначале установить положение нейтральной оси (нулевой линии), а затем точки, наиболее удаленные от этой линии.

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Положение нейтральной оси (нулевой линии) при совместном действии изгиба и центрального растяжения или сжатия можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

*При совместном действии изгиба и центрального сжатия применять полученные формулы можно лишь к коротким стержням большой жесткости, так как в случае тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости.*

#### 9.6. Совместное действие изгиба и кручения

##### 9.6.1. Напряжения при совместном действии изгиба и кручения круглого стержня

На практике кручение стержней часто сопровождается изгибом. С таким сложным видом деформации приходится встречаться, например, при расчете валов, когда силы, передающиеся валу, не проходят через его ось.

Рассмотрим напряженно–деформированное состояние стержня, в сечениях которого действуют как изгибающие, так и крутящие моменты.

Напряженно–деформированное состояние при одновременном изгибе и кручении стержней большой жесткости, можно определять как совокупность напряженно–деформированных состояний, обусловленных изгибом и кручением и независящих одно от другого. Таким образом, в любой точке сечения нормальные напряжения должны определяться по формуле для случая только изгиба стержня, касательные напряжения – как сумма касательных напряжений от изгиба и кручения.

Определенное таким образом напряженное состояние стержня отличается от такого же при изгибе только величиной и направлением касательных напряжений. Поэтому главные напряжения необходимо определять по тем же формулам, что и при изгибе (8.36), то есть

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (9.37)$$

Рассмотрим совместное действие изгиба и кручения стержня круглого поперечного сечения.

Одновременное действие кручения с изгибом чаще всего встречается в различных деталях машин. Например, коленчатый вал (рис. 9.12) воспринимает значительные крутящие моменты и, кроме того, он работает и на изгиб.

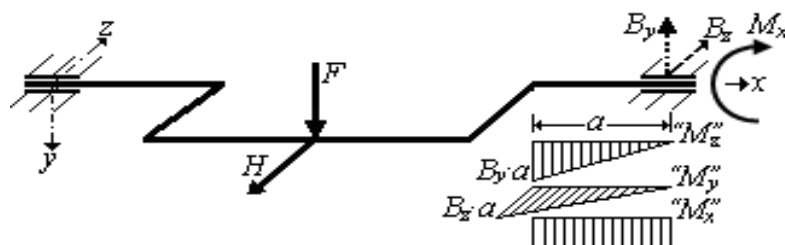


Рис. 9.12

Так как вал имеет круглое поперечное сечение, то два изгибающих момента можно свести в один суммарный момент

$$M_n = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad M_k = M_x \quad (9.38)$$

Возникающие в сечении напряжения могут достигать значительных значений, поэтому необходимо предварительно определить какое из напряжений представляет большую опасность с точки зрения нарушения прочности.

Определим наиболее нагруженные частицы (опасные точки).

На основании ранее полученных формул для определения нормальных и касательных напряжений при изгибе, а также касательных напряжений при кручении имеем

$$\sigma_u = \frac{M_u \cdot y}{I_z}; \quad \tau_u = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot I_z}; \quad \tau_k = \frac{M_k \cdot \rho}{I_\rho} \quad (9.39)$$



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Следовательно, для опасных точек (рис. 9.13) будем иметь

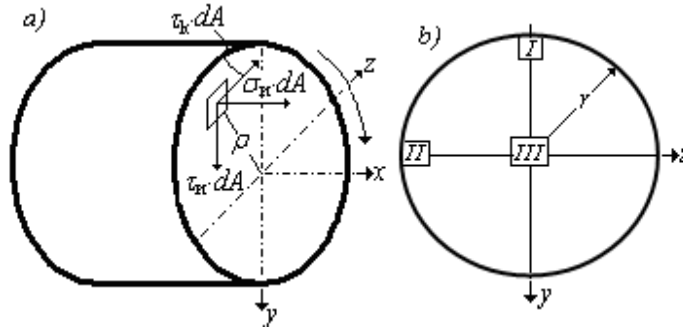


Рис. 9.13

- I.  $y = r. \quad \tau_{II} = 0; \quad \sigma_{II} = \sigma_{\max} = M / W_z;$   
 $\rho = r. \quad \tau_K = \tau_{\max} = M_K / W_\rho.$
- II.  $y = 0. \quad \sigma_{II} = 0; \quad \tau_{II} = \tau_{\max} = 4Q/3A;$   
 $\rho = r. \quad \tau_K = \tau_{\max} = M_K / W_K.$
- III.  $y = 0. \quad \sigma_{II} = 0; \quad \tau_{II} = \tau_{\max} = 4Q/3A; \quad \rho = 0; \quad \tau_K = 0$

(9.40)

Наиболее нагруженной будет частица **I**, так как касательные напряжения при изгибе играют второстепенную роль. Каждое из напряжений, действующих в точке **I** вала, может быть меньше допускаемого для соответствующего вида деформаций. Однако одновременное их действие может оказаться опасным с точки зрения потери прочности. Для оценки одновременного действия напряжений  $\sigma_{II}$  и  $\tau_K$  выделим у наиболее опасной точки **I**, элементарную частицу в виде треугольной призмы (рис. 9.14).

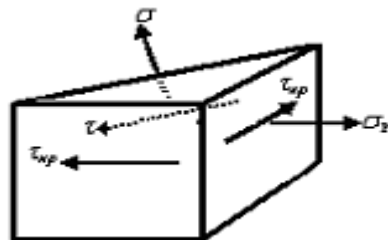


Рис. 9.14.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Выделенный элемент находится в плоском напряженном состоянии, следовательно,

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_u}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2}, \quad \sigma_2 = 0. \rightarrow \sigma_{1,3} = \frac{M_u}{2W_u} \pm \frac{\sqrt{M_u^2 + M_k^2}}{2W_u} \quad (9.41)$$

Этот случай сложного сопротивления (совместное действие изгиба и кручения) относится ко второй группе и расчет необходимо вести с применением *теорий прочности*.

**9.6.2. Применение теорий прочности к расчету круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения**

Применяя различные теории прочности, получаем следующие расчетные формулы для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.

Известно, что

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_u}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_k^2}, \quad \sigma_2 = 0. \quad W_u = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \sigma_u = \frac{M_u}{W_u}, \quad \tau_k = \frac{M_k}{W_\rho} = \frac{M_k}{2W_u}.$$

- I-я теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений.

Имеем (5.1)

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

Следовательно, условие прочности по первой теории прочности имеет вид

$$\frac{M_u + \sqrt{M_u^2 + M_k^2}}{2W_u} \leq [\sigma] \quad (9.42)$$

- II-я теория прочности – теория наибольших линейных деформаций.

Имеем (5.6)

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\frac{M_u}{2W_u} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_u^2}{W_u^2} + 4 \frac{M_k^2}{4W_u^2}} - \mu \left[ \frac{M_u}{2W_u} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_u^2}{W_u^2} + 4 \frac{M_k^2}{4W_u^2}} \right].$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Следовательно, условие прочности по второй теории прочности имеет вид

$$\frac{1}{W_{\text{и}}} \left( \frac{1-\mu}{2} M_{\text{и}} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} \right) \leq [\sigma] \quad (9.43)$$

• III-я теория прочности – теория наибольших касательных напряжений.

Имеем (5.10)

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$\frac{M_{\text{и}} + \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{2W_{\text{и}}} - \frac{M_{\text{и}} - \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{2W_{\text{и}}} \leq [\sigma].$$

Следовательно, условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma] \quad (9.44)$$

• IV-я теория прочности – энергетическая теория.

Имеем (5.20)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4W_{\text{и}}^2} \cdot \left( M_{\text{и}}^2 + 2M_{\text{и}} \cdot \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} + M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2 \right),$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{4W_{\text{и}}^2} \cdot \left( M_{\text{и}}^2 - 2M_{\text{и}} \cdot \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} + M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2 \right),$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_3 = \frac{1}{4W_{\text{и}}^2} \cdot \left( M_{\text{и}}^2 - M_{\text{и}}^2 - M_{\text{к}}^2 \right)$$

$$\frac{1}{2W_{\text{и}}} \cdot \sqrt{2M_{\text{и}}^2 + 2M_{\text{и}}^2 + 2M_{\text{к}}^2 + M_{\text{и}}^2 - M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} \leq [\sigma] \cdot \frac{1}{2W_{\text{и}}} \cdot \sqrt{4M_{\text{и}}^2 + 3M_{\text{к}}^2} \leq [\sigma].$$

Следовательно, условие прочности по четвертой теории прочности имеет

вид

$$\frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma] \quad (9.45)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Все полученные расчетные формулы по различным теориям прочности можно записать в общем виде

$$\sigma_p = \frac{M_p}{W_u} \leq [\sigma] \quad (9.46)$$

где

$\sigma_p$  – расчетное (приведенное) напряжение;

$M_p$  – расчетный (приведенный) момент, значение которого определяется по формулам в зависимости от выбранной для расчета теории прочности.

Эти формулы имеют вид

$$M_p = 0,5 \cdot M_u + 0,5 \cdot \sqrt{M_u^2 + M_k^2} - \text{первая теория прочности};$$

$$M_p = \frac{1-\mu}{2} \cdot M_u + \frac{1+\mu}{2} \cdot \sqrt{M_u^2 + M_k^2} - \text{вторая теория прочности};$$

(9.47)

$$M_p = \sqrt{M_u^2 + M_k^2} - \text{третья теория прочности};$$

$$M_p = \sqrt{M_u^2 + 0,75 \cdot M_k^2} - \text{четвертая теория прочности}$$

Как известно, из условия прочности (9.46) вытекают три вида задач:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют величину расчетного (приведенного) момента  $M_p$ , в зависимости от выбранной для расчета теории прочности, и из условия прочности (9.46) находят величину требуемого момента сопротивления

$$W_u \geq \frac{M_p}{[\sigma]}; \quad W_u = \frac{\pi d^3}{32}$$

и диаметра круглого вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_p}{\pi [\sigma]}}. \quad (9.48)$$

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

б). Определение допускаемой нагрузки. Решение второй задачи сводится к определению грузоподъемности круглого стержня (нахождение нагрузки, при действии которой расчетные (приведенные) напряжения в опасном сечении равны допускаемым напряжениям). По известному значению осевого момента сопротивления  $W_u$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[M_p] \leq W_u \cdot [\sigma] \quad (9.49)$$

По найденному значению  $[M_p]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

в). Проверочный расчет. По известным значениям  $M_u$ ,  $M_k$ ,  $W_u$ ,  $[\sigma]$  проверяют выполнение условия прочности (9.46)

$$\sigma_p = \frac{M_p}{W_u} \leq [\sigma]$$

При расчете стержней круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения обычно пользуются третьей и четвертой теориями прочности.

Приведенные формулы применимы и к стержням кольцевого поперечного сечения.

Значение  $M_p$  определяется в опасном сечении вала. Для определения наиболее опасного сечения вала в тех случаях, когда его сразу трудно указать, строится эпюра расчетных /приведенных моментов/ ( $M_{изг}^{верт}$ ;  $M_{изг}^{гор}$ ;  $M_{изг}^{сум}$ ;  $M_k$ ;  $M_p$ ).

Таким образом, расчет стержня круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения по форме совпадает с расчетом стержней на плоский изгиб.

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

*При этом, в расчетную формулу вместо изгибающего момента входит приведенный момент, величина которого зависит от изгибающего и крутящего моментов, а также от принятой для расчета теории прочности.*

**9.7. Контрольные вопросы для самопроверки по теме  
«Сложное сопротивление»**

1. Какие виды деформации называются сложным сопротивлением?
2. Какие сложные виды деформации Вы знаете?
3. Какой принцип положен в основу расчета бруса на сложное сопротивление?
4. Когда можно применять принцип независимости действия сил в расчетах на сложное сопротивление?
5. Какие случаи сложного сопротивления относятся к первой группе?
6. Какие случаи сложного сопротивления относятся ко второй группе?
7. Какие правила знаков для внутренних усилий приняты при расчетах на сложное сопротивление?
8. Какие точки поперечного сечения стержня (бруса) называются опасными?
9. Какой изгиб называется косым?
10. По какой формуле определяется нормальное напряжение при косом изгибе?
11. Как определяется положение опасных точек при косом изгибе?
12. По какой формуле определяется положение нейтральной оси при косом изгибе?
13. По какой формуле определяется положение плоскости деформации при косом изгибе?

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

14. По какой формуле определяется величина полного (суммарного) прогиба при косом изгибе?
15. Какой вид деформации бруса называется внецентренным растяжением или сжатием?
16. По какой формуле определяется нормальное напряжение при внецентренном растяжении или сжатии?
17. Какой принцип используется для вывода формулы нормального напряжения в случае внецентренного действия силы?
18. Как определяется положение опасных точек при внецентренном растяжении или сжатии?
19. По какой формуле определяется положение нейтральной оси при внецентренном растяжении или сжатии?
20. Какими свойствами обладает нейтральная ось (нулевая линия) при внецентренном растяжении (сжатии)?
21. Что называется ядром сечения?
22. В каких случаях необходимо строить ядро сечения?
23. Какой вид деформации балки называется совместным действием изгиба и центрального растяжения или сжатия?
24. По какой формуле определяется нормальное напряжение при совместном действии изгиба и центрального растяжения или сжатия?
25. Как определяется положение нейтральной оси при совместном действии изгиба и центрального растяжения или сжатия?
26. Как определяется положение опасных точек при совместном действии изгиба и центрального растяжения или сжатия?
27. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях стержня при совместном действии изгиба и кручения?

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

28. По какой формуле определяются численные значения главных напряжений при совместном действии изгиба и кручения?
29. Напишите формулу условия прочности по первой теории прочности для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.
30. Напишите формулу условия прочности по второй теории прочности для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.
31. Напишите формулу условия прочности по третьей теории прочности для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.
32. Напишите формулу условия прочности по четвертой теории прочности для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения.
33. По какой формуле определяется величина расчетного (приведенного) момента по первой теории прочности?
34. По какой формуле определяется величина расчетного (приведенного) момента по второй теории прочности?
35. По какой формуле определяется величина расчетного (приведенного) момента по третьей теории прочности?
36. По какой формуле определяется величина расчетного (приведенного) момента по четвертой теории прочности?
37. Какие три типа задач вытекают из условия прочности для расчета круглых стержней, работающих на совместное действие изгиба и кручения?
38. Какими теориями прочности обычно пользуются при расчете круглых стержней на совместное действие изгиба и кручения?



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

ТЕМА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

10.1. Основные понятия

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает недостаточно для того, чтобы получить полное представление о работе сооружения. Выяснение того, что напряжения не превосходят допустимого (предельного) значения, еще не позволяет сделать вывод о безопасности эксплуатации сооружения.

Это вызвано тем, что наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости* сооружения или его элементов.

Определение. Устойчивость – это свойство сооружения оказывать сопротивление посторонним случайным воздействиям и самостоятельно восстанавливать свое положение и форму равновесия в деформированном состоянии, когда случайные воздействия исчезают.

Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое часто называют *потерей устойчивости*. Границу этого перехода называют критическим состоянием сооружения, а соответствующие нагрузки – критическими.

Потеря устойчивости может быть двух видов: потеря устойчивости положения и потеря устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии.

10.2. Потеря устойчивости положения

*Потеря устойчивости положения* относится к случаю, когда сооружение в целом не может далее сохранять свое первоначальное положение и вынуждено его изменить, как, например, при опрокидывании подпорной стены, плотины, водонапорной башни, башенного крана и др. В этом случае происходит

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

нарушение равновесия внешних сил, действующих на сооружение, которое восстанавливается лишь в новом его положении.

Для того, чтобы отчетливее понять устойчивость положения сооружений, рассмотрим шарик на дне вогнутой сферы (рис.10.1, а), на вершине выпуклой сферы (рис.10.1, б) и на горизонтальной поверхности (рис.10.1, в).

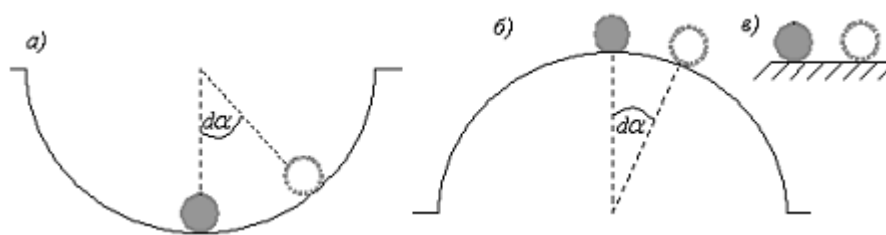


Рис.10.1

Сообщим шарiku сколь угодно малое начальное перемещение и скорость. Положение шарика после этого изобразим пунктиром. Уберем причину его перемещения и рассмотрим последствия.

В случае а) равновесия не будет, поскольку наклонная реакция гладкой вогнутой сферы не может уравновесить вертикальную силу веса.

Равнодействующая веса и реакции будет направлена в сторону исходного положения шарика и он начнет возвращаться к нему. При этом, скатываясь по сфере из отклоненного положения, шарик будет приобретать кинетическую энергию, благодаря которой он перекатится через исходное положение на другую сторону сферы, а затем начнет двигаться в обратном направлении.

Таким образом, шарик будет совершать движение около исходного своего положения на дне сферы. Трение будет поглощать энергию, что, в конце концов, приведет шарик к его исходному положению.

Все это свидетельствует о том, что положение шарика на дне вогнутой сферы *устойчивое*.

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

Определение. Если тело при всяком отклонении способно возвращаться в исходное состояние, то оно устойчиво.

В случае б) равнодействующая реакции гладкой выпуклой сферы и веса шарика будет направлена от исходного его положения и шарик сразу же начнет катиться по сфере дальше от исходного положения.

Это означает, что положение шарика на вершине выпуклой сферы *неустойчивое*.

В случае в) реакция гладкой плоскости хотя и может уравновесить силу веса шарика, но начальная кинетическая энергия в идеальных условиях ничем не может быть погашена, и шарик будет двигаться дальше.

Следовательно, положение шарика на гладкой плоскости в идеальных условиях также будет *неустойчивое*.

Если же в качестве начального возмущения принять только начальное смещение, то шарик на плоскости после смещения останется на своем новом месте.

Такое положение шарика называют *безразличным*.

**10.3. Потеря устойчивости формы равновесия  
в деформированном состоянии**

*Потеря устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии стержня* относится к случаю, когда первоначальная форма деформации тел, у которых хотя бы одно из трех измерений мало по сравнению с двумя другими, соответствует малым начальным нагрузкам определенного вида. При некотором значении этих нагрузок форма равновесия становится неустойчивой и вынуждена переходить в другую форму, качественно отличную от первоначальной.

### СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

#### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Наступает разветвление (бифуркация) теоретически возможных, по крайней мере, двух форм равновесия, одна из которых неустойчива.

Рассматривая непрерывный процесс нагружения, можно заметить, что в упругих системах переход при бифуркации из устойчивого состояния в другое происходит сразу же с большими перемещениями, что свидетельствует о его опасности.

Чтобы рассмотреть более детально явление «потеря устойчивости формы равновесия деформированного состояния стержня», необходимо помнить, что обычные приемы расчетов сооружений на прочность предполагают сохранение определенного начального вида деформации вплоть до момента, являющегося опасным для прочности данного материала.

В определенных случаях, еще до появления разрушающей нагрузки начальная форма деформированного состояния становится неустойчивой и переходит в другую форму.

Эта новая форма создает в элементе сооружения дополнительные напряжения, не предусмотренные обычным расчетом на прочность, и может оказаться, что эти дополнительные напряжения вызовут разрушение материала элемента сооружения при нагрузках менее допускаемых по обычному расчету на прочность для первоначальной формы равновесия.

#### 10.4. Продольный изгиб прямого стержня

Потеря несущей способности центрально – сжатого стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность материала, но и потому, что стержень под влиянием внешних сил не может устойчиво сохранять ту форму, которая ему была дана при изготовлении, или, как говорят, потеряет устойчивость.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Поэтому для надежной работы конструкций недостаточно, чтобы ее элементы были прочны; необходимо, чтобы все элементы конструкции были также устойчивы и при действии внешних нагрузок могли иметь только одну форму равновесия, соответствующую характеру их основной деформации под действием внешних сил.

Прямолинейная форма равновесия упругого стержня, защемленного нижним концом и нагруженного сверху центрально приложенной сжимающей силой, при некотором значении этой силы, может оказаться неустойчивой и стержень резко искривится.

Следовательно, упругий стержень начнет работать на совместное действие центрального сжатия и плоского изгиба (рис.10.2).

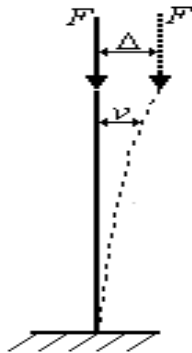


Рис.10.2

Определение. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня называется продольным изгибом.

Этот термин условен, так как здесь речь идет не о проверке на изгиб, а о проверке на устойчивость прямолинейной формы стержня.

Опыты показывают, что при центральном сжатии существует такая величина силы, при которой, помимо укорочения стержня, возникает возможность искривления (выпучивания) стержня в плоскости наименьшей жесткости.

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Такое состояние отдельного стержня или конструкции в целом, при котором возможно появление нескольких форм устойчивого равновесия, называется безразличным равновесием, а внешняя сила (нагрузка), соответствующая безразличному равновесию, называется критической.

Определение. Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы  $F$ , при которой первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой.

Переход к критическому значению силы  $F$  происходит внезапно.

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит очень сильное нарастание прогибов при малом нарастании сжимающей силы.

Прогибы и нагрузки связаны между собой нелинейной зависимостью.

Определение. Потерю устойчивости со сменой формы деформированного состояния называют потерей устойчивости первого рода.

Определение. Потерей устойчивости второго рода принято называть первое предельное состояние системы по несущей способности, когда при дальнейшем увеличении нагрузки равновесие между внешними и внутренними силами невозможно. Оно возможно лишь при уменьшении нагрузки.

Потеря устойчивости второго рода может происходить как со сменой первоначальной формы деформированного состояния, так и без нее, как в упругой, так и в упруго – пластической стадии.

Задачей устойчивости сооружений является их расчет, главным образом, на устойчивость первого рода.

*Таким образом, исследование напряженного состояния элементов конструкции, исходя только из начальных, соответствующих малым нагрузкам, видов деформации, в отдельных случаях явно недостаточно.*

В этих случаях необходимы дополнительные исследования устойчивости начальной формы равновесия в деформированном состоянии.

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Поперечные сечения сжатых стержней должны назначаться не из условий прочности от центрального сжатия, а из условий того, чтобы сжимающие напряжения были меньше критических напряжений

$$\sigma < \sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}, \quad (10.1)$$

или

$$F < F_{кр} \rightarrow F \leq \frac{F_{кр}}{n_y} \quad (10.2)$$

где

$n_y$  – коэффициент запаса на устойчивость.

**10.5. Устойчивость деформированного состояния центрально сжатых стержней**

**10.5.1. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня**

Для исследования устойчивости равновесия упругих систем обычно используют метод Эйлера, основанный на анализе разветвления возможных форм равновесия упругой системы.

Решение задачи устойчивости проводится при следующих предпосылках:

- сжатый стержень должен иметь совершенно прямолинейную форму, материал однороден, а сжимающая сила приложена строго в центре тяжести поперечного сечения;
- потеря устойчивости отождествляется с выполнением условий существования новых форм равновесия, сколь угодно близких к исходной.

При расчете инженерных сооружений критическая нагрузка принимается за предельную (опасную), по которой и назначается запас устойчивости.

При решении задачи устойчивости нагрузку необходимо задавать со степенью детализации более высокой, чем при решении обычных задач

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

сопротивления материалов. Необходимо указать не только величину и направление силы, но также и характер ее поведения в процессе отклонения системы от исходного положения равновесия.

Рассмотрим метод Эйлера на примере центрально сжатого, идеально прямого стержня (рис. 10.3).

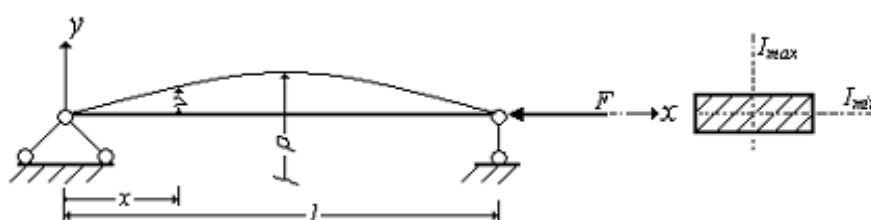


Рис. 10.3

При малых сжимающих силах прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой. При силах, превышающих некоторое критическое значение, она становится неустойчивой.

Предположим, что под действием силы  $F$ , величина которой несколько превышает  $F_{кр}$ , стержень с шарнирно закрепленными концами слегка изогнулся в плоскости  $x$  о  $y$ . Если в сечениях стержня возникнут изгибающие моменты, способные удержать стержень в изогнутом состоянии, то первоначальная линейная форма равновесия стержня окажется неустойчивой.

Следовательно, при критической силе наряду с исходной прямолинейной формой равновесия как бы возможна смежная, весьма близкая к ней криволинейная форма.

Отнесем искривленную ось стержня к прямоугольной системе координат с началом на левом конце стержня. Предположим также, что критическая сила  $F_{кр}$  не вызывает в стержне напряжений, превышающих предел пропорциональности, и рассматриваются только малые отклонения от прямолинейной формы.



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Рассмотрим произвольное сечение на расстоянии  $x$ , где

$$M_{(x)} = -F_{кр} \cdot v_{(x)}.$$

Тогда, приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) стержня (8.49)

$$v_{(x)}'' = \frac{M}{EI_{\min}} = -\frac{F_{кр}}{EI_{\min}} \cdot v_{(x)}.$$

Здесь

$I_{\min}$  – наименьший осевой момент инерции сечения стержня относительно главной центральной оси, соответствующей направлению искривления стержня.

Введя обозначение

$$k^2 = F_{кр} / EI_{\min} \rightarrow k = \sqrt{F_{кр} / EI_{\min}}, \quad (10.3)$$

получим

$$v_{(x)}'' + k^2 v_{(x)} = 0 \quad (10.4)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения представляется гармонической функцией

$$v_{(x)} = C \sin kx + D \cos kx \quad (10.5)$$

Постоянные  $C$  и  $D$  должны быть найдены из граничных условий:

1) при  $x = 0$ :  $\rightarrow v = 0$ ;

2) при  $x = l$ :  $\rightarrow v = 0$ .

Из первого условия следует, что  $D = 0$ .

Из второго условия следует, что

$$C \cdot \sin kl = 0 \quad (10.6)$$

Это уравнение имеет два возможных решения

$$C = 0 \text{ или } \sin kl = 0.$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

В первом случае получается, что при  $C = D = 0$  перемещения  $v_{(x)}$  обращаются тождественно в ноль, и стержень, следовательно, имеет прямолинейную форму.

Во втором случае

$$\sin kl = 0. \rightarrow kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \rightarrow (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как  $l \neq 0$ ,  $kl \neq 0$  (как не соответствующие физическому смыслу задачи), принимаем

$$kl = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10.7)$$

Следовательно,

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \rightarrow k^2 = n^2 \pi^2 / l^2 = F_{kp} / EI_{\min}. \rightarrow F_{kp} = n^2 \pi^2 EI_{\min} / l^2.$$

Из полученного соотношения вытекает, что имеются бесчисленные значения  $F_{kp}$ , при которых могут существовать изогнутые формы равновесия стержня.

Наименьшее значение критической силы получается при  $n = 1$  и  $kl = \pi$ , когда

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (10.8)$$

Эта формула впервые была получена академиком Петербургской Академии наук Леонардом Эйлером в 1744 году, поэтому критическая сила  $F_{kp}$  называется также Эйлеровой критической силой.

Если центрально сжимающая сила меньше критической, то возможна только прямолинейная форма равновесия, которая в этом случае является устойчивой.

### 10.6. Расчет сжатых стержней на устойчивость.

#### Форма изогнутой оси стержня

Уравнение изогнутой оси стержня при малых деформациях имеет вид

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$v_{(x)} = C \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

При  $n = 1$  стержень изгибается по полуволне синусоиды с максимальным прогибом

$$v_{(x)} = C.$$

При любом целочисленном значении  $n$  упругая линия стержня изображается кривой в виде  $n$  полуволн. Максимум  $v_{(x)}$  имеет место при таком значении  $x$ , для которого

$$\frac{dv}{dx} = 0,$$

то есть

$$\frac{dv}{dx} = C \cdot \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x = 0. \rightarrow \cos \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

Наименьшее значение аргумента, при котором косинус равен нулю, будет  $\pi / 2$ . Тогда

$$\frac{n\pi}{l} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{l}{2n}.$$

Если  $n = 1$ , то  $x = \frac{l}{2}$ , а максимум  $v_{(x)}$  имеет место посередине стержня.

Из полученных уравнений и рисунка (10.4) следует, что  $n$  представляет собой число полуволн синусоиды, располагающихся на длине изогнутого стержня.

Итак, получено множество значений критических сил. Каждой критической силе соответствует своя форма равновесия. При этом необходимо отметить, что равновесие, соответствующее первой форме изгиба ( $n = 1$ ), является устойчивым, а всем остальным, так называемым высоким критическим силам ( $n = 2, 3, \dots$ ), – неустойчивым.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

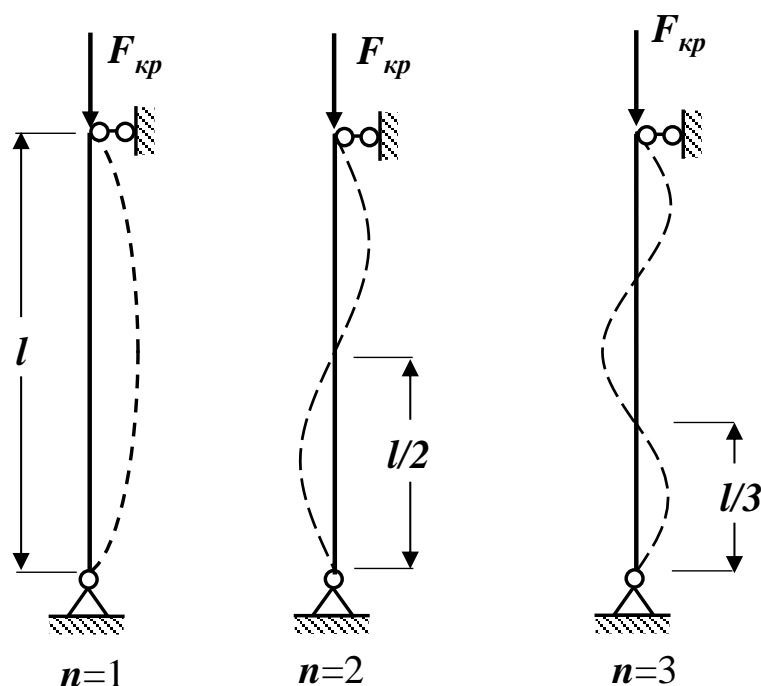


Рис. 10.4

Для инженерных расчетов важно установить усилие, при котором конструкция перестает быть работоспособной, то есть практический интерес представляет наименьшая (первая) критическая сила (при  $n = 1$  и  $kl = \pi$ ) (10.8)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

При выводе этой формулы Эйлера было установлено, что стержень шарнирно опертый по концам, изгибается по синусоиде, а найти численное значение прогибов не удалось (постоянная интегрирования  $C$  осталось не найдена). Это связано с тем, что рассматриваемая модель устойчивости стержня, основанная на приближенном дифференциальном уравнении изогнутой оси (упругой линии) стержня и схеме деформации, позволяет найти критическое значение силы из условия существования нетривиального (ненулевого) решения однородного линейного дифференциального уравнения.

Величина прогибов определяется с точностью до масштаба величины  $C$ .

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Рассматриваемая модель не дает возможности описать состояние системы при  $F > F_{кр}$ .

Если применить точное дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) стержня (8.47)

$$\frac{v''_{(x)}}{[1 + (v'_{(x)})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{(x)}}{EI_{\min}},$$

то при  $F > F_{кр}$  перемещения растут столь быстро, что пренебрегать величиной  $(v')^2$  в знаменателе нельзя. Если кроме рассмотрения точного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня уточнить еще и краевые условия при  $x = l$  (учесть смещение подвижной опоры), то можно получить точное решение. Зависимость, вытекающая из него, будет иметь вид

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{F_{кр}}{F}} \quad (10.9)$$

**10.7. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы**

Формула (10.8) дает значение критической силы для стержня с шарнирно закрепленными концами. Случай шарнирного закрепления концов стержня принято называть *основным*.

Для других способов закрепления концов стержня также можно получить значения  $F_{кр}$ , поступая аналогично тому, как это было сделано для основного случая, то есть составить дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, решить и исследовать его с учетом условий закрепления на концах стержня.

Например, рассмотрим консольный стержень под действием сжимающей силы (рис. 10.5).

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

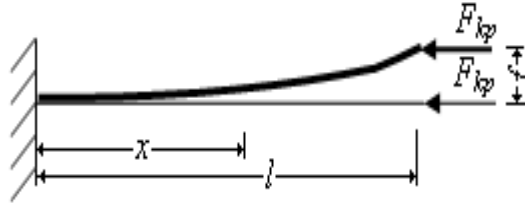


Рис.10.5

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$EI_{\min} v''_{(x)} = M_{(x)} = M_0 - F_{kp} \cdot v_{(x)},$$

или

$$v''_{(x)} + \frac{F_{kp}}{EI_{\min}} v_{(x)} = \frac{M_0}{EI_{\min}}.$$

Введем обозначение

$$k^2 = F_{kp} / EI_{\min}.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение примет вид

$$v''_{(x)} + k^2 v_{(x)} = M_0 / EI_{\min}.$$

Получили неоднородное дифференциальное уравнение. Решение будем искать как сумму решения однородного уравнения и частного решения, то есть

$$v_{(x)} = \dot{v} + \ddot{v}$$

Тогда

$$\dot{v}'' + k^2 \cdot \dot{v} = 0$$

Отсюда

$$\dot{v} = C \cdot \sin kx + D \cdot \cos kx$$

Частное решение возьмем в виде

$$\ddot{v} = M_0 / F_{kp}$$

Общее решение будет иметь вид

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$v_{(x)} = C \sin kx + D \cos kx + M_0 / F_{kp}.$$

Граничные условия:

- при  $x = 0$ :  $\rightarrow v = 0$ ;  $D = -M_0 / F_{kp}$ ;
- при  $x = 0$ :  $\rightarrow v' = 0$ .  $\rightarrow kC \cos kx - kD \sin kx \rightarrow kC = 0 \rightarrow C = 0$ .
- при  $x = l$ :  $\rightarrow v = f$ ;  $-M_0 / F_{kp} \cos kl + M_0 / F_{kp} = f \rightarrow M_0 / F_{kp} (1 - \cos kl) = f$ .

Так как

$$M_0 = F_{kp} \cdot f,$$

то

$$F_{kp} f / F_{kp} (1 - \cos kl) = f \rightarrow f (1 - \cos kl) = f.$$

Отсюда

$$\cos kl = 0 \rightarrow kl = (2n+1)\pi / 2 \rightarrow k = (2n+1)\pi / 2l \rightarrow k^2 = (2n+1)^2 \pi^2 / 4l^2.$$

Тогда

$$\frac{F_{kp}}{EI_{\min}} = \frac{(2n+1)^2}{4l^2} \pi^2 \rightarrow F_{kp} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI_{\min}}{4l^2} \quad (n=0, 1, 2,)$$

Наименьшее значение критической силы будет при  $n=0$

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2} \quad (10.10)$$

Аналогично можно получить формулы для определения критических сил при любых других условиях закрепления стержня, но те же результаты можно получить, не прибегая к интегрированию уравнений оси искривленного стержня, если принять во внимание, что во всех случаях упругая линия представляет кривую типа синусоиды. При этом в точках перегиба, совпадающих с концами полуволны синусоиды, изгибающий момент равен нулю, так что любая полуволна искривленного сжатого стержня находится в тех же условиях, что и стержень, имеющий шарнирное закрепление концов.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Поэтому критическая сила в случае любого закрепления концов стержня может быть определена по формуле (10.8)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2},$$

если в ней длину стержня заменить длиной полуволны синусоиды, по которой искривляется стержень при данном закреплении его концов.

В рассмотренных нами случаях имеем:

а) в случае шарнирного закрепления обоих концов длина полуволны синусоиды  $l_0$  совпадает с длиной стержня, то есть

$$l_0 = l. \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$$

б) в случае защемления одного конца длина стержня совпадает с длиной половины полуволны синусоиды, то есть

$$l_0 = 2l. \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}.$$

Обобщая полученные формулы, можно написать общее выражение критической силы для сжатого стержня в виде

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (10.11)$$

где

$\mu$  - коэффициент приведения длины (коэффициент приведенной длины), зависящий от способа закрепления концов стержня.

Коэффициент приведения длины  $\mu$  позволяет любой случай закрепления концов стержня свести к основному случаю, то есть к стержню с шарнирно закрепленными концами. Для наиболее часто встречающихся случаев закрепления концов стержня коэффициент приведения длины  $\mu$  имеет следующие значения (рис.10.6)



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

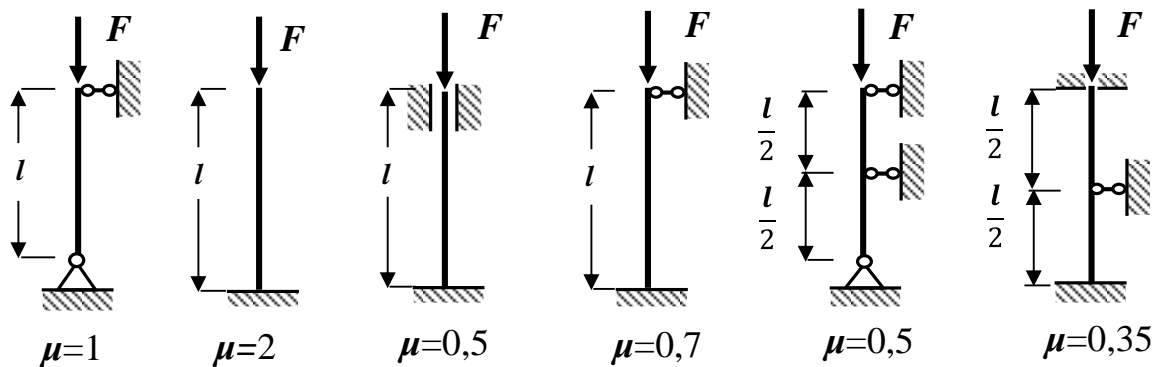


Рис. 10.6. Значения коэффициентов приведенной длины

10.8. Критические напряжения.

Пределы применимости формулы Эйлера

Вывод формулы Эйлера (10.11) основан на применении приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (упругой линии). Поэтому использовать эту формулу можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, то есть пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \sigma_{пц}$$

Следовательно, это есть условие применимости формулы Эйлера.

Получим формулу для критического напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \rightarrow \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10.12)$$

Из полученной формулы следует, что критическое напряжение зависит только от упругих свойств материала (модуля упругости  $E$  и гибкости стержня  $\lambda$ )

При этом

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} \quad (10.13)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

где

$\lambda$  – гибкость стержня.

В системе координат  $\sigma_{кр} - \lambda$  зависимость  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$  выражается гиперболической кривой, называемой *гиперболой Эйлера*.

Для примера приведена диаграмма(график) критических напряжений для стержня из стали марки Ст. 3, для которой модуль  $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{нц} = 200 \text{ МПа}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  (рис. 10.7)

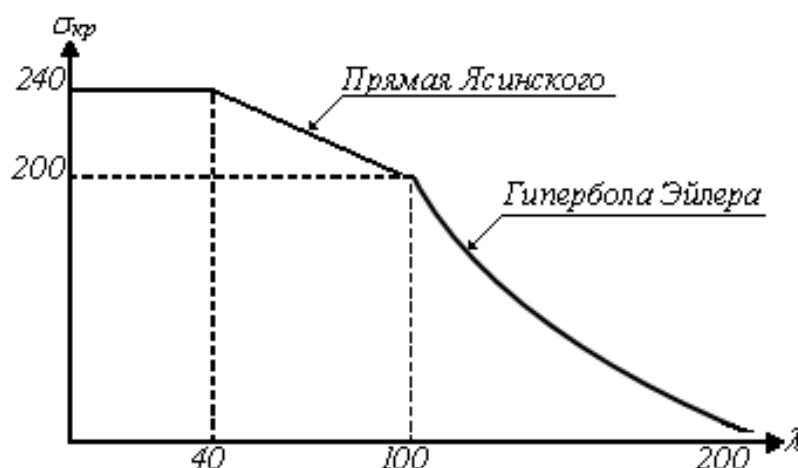


Рис. 10.7

График показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжение стремится к нулю и, наоборот, по мере приближения гибкости стержня к нулю критическое напряжение стремится к бесконечности.

Формула Эйлера становится неприемлемой, когда напряжение  $\sigma_{кр}$  достигает предела пропорциональности  $\sigma_{нц}$ . Следовательно, предельное значение гибкости будет равно

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{нц}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}} . \quad (10.14)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Таким образом, формула Эйлера применима при гибкости  $\lambda \geq \lambda_{пред}$  и становится непригодной при гибкости стержня, меньше предельного значения  $\lambda_{пред}$  ( $\lambda < \lambda_{пред}$ ).

Значения предельной гибкости  $\lambda_{пред}$ , зависящие от материала, приводятся в справочных таблицах (для стали марки Ст. 3 –  $\lambda_{пред} = 100$ ; для дерева (сосна) —  $\lambda_{пред} = 70$ ; для чугуна –  $\lambda_{пред} = 80$  и т.д.)

Однако явление продольного изгиба продолжает существовать и за пределом упругости. Формула Эйлера в этом случае дает завышенные результаты, то есть переоценивает действительную устойчивость стержня.

В связи с этим, величину критических напряжений за пределом пропорциональности определяют по эмпирическим формулам Тетмайера-Ясинского линейного вида

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda \quad (10.15)$$

или параболического вида (для чугуна)

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2, \quad (10.16)$$

полученных на основе обработки опытных данных по продольному изгибу стержней в зависимости от гибкости и вида материала.

Значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ , зависящих от материала, приводятся в справочных таблицах (для Ст. 3:  $a = 310 \text{ МПа}$ ;  $b = 1,14 \text{ МПа}$ ; для дерева:  $a = 40 \text{ МПа}$ ;  $b = 0,203 \text{ МПа}$ ; для чугуна:  $a = 776 \text{ МПа}$ ;  $b = 12 \text{ МПа}$ ;  $c = 0.053$  и т.д.).

При некотором значении гибкости  $\lambda_0$  величина критических напряжений  $\sigma_{кр}$  становится равной предельному напряжению при сжати:

- для пластичных материалов  $\sigma_{кр} = \sigma_m$ ;
- для хрупких материалов  $\sigma_{кр} = \sigma_s$ .

Определение. Стержни, у которых  $\lambda < \lambda_0$ , называются стержнями малой гибкости (массивными стержнями).

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Такие стержни рассчитывают только на прочность.

*Таким образом, несущая способность стержней малой гибкости (массивных стержней) определяется только прочностью материала.*

**10.9. Расчет сжатых стержней на устойчивость  
по коэффициенту продольного изгиба**

Для гибких центрально сжатых стержней, кроме условия прочности, должно быть удовлетворено также условие устойчивости, которое можно выразить неравенством

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_{уст}, \quad (10.17)$$

где

$A = A_{брутто}$  – площадь поперечного сечения стержня без учета его ослаблений;

$[\sigma]_{уст}$  – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

Допускаемое напряжение  $[\sigma]_{уст}$  при расчетах на устойчивость назначается с запасом против критического напряжения, то есть выражается формулой

$$[\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_{уст}}, \quad (10.18)$$

где

$[n]_{уст}$  – нормативный (требуемый) коэффициент запаса устойчивости, значение которого зависят от материала и гибкости стержня.

Коэффициент запаса устойчивости  $[n]_{уст}$  принимается более высоким, чем коэффициент запаса прочности. Это вызвано рядом обстоятельств (начальная кривизна стержня, внецентренное приложение нагрузки и т.д.), которые значительно уменьшают критическую нагрузку, но почти не влияют на прочность конструкции.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Выразим допускаемое напряжение при расчете стержней на устойчивость  $[\sigma]_{уст}$  через допускаемое напряжение  $[\sigma]_{сж}$ , принимаемое при расчетах стержней на прочность

$$[\sigma]_{уст} = \varphi \cdot [\sigma]_{сж}, \quad (10.19)$$

где

$\varphi$  – коэффициент понижения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба) центрально – сжатых стержней.

Величина коэффициента  $\varphi$  зависит от гибкости стержня и его материала. Значения коэффициента  $\varphi$  приведены в справочных таблицах.

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений (10.17) принимает вид

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]_{сж} \quad (10.20)$$

или

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]_{сж} \quad (10.21)$$

Применяя условие устойчивости, можно выполнять три вида расчета:

1. Проектный расчет. По заданной нагрузке  $F$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]_{сж} = [\sigma]$  находят величину требуемой площади поперечного сечения *методом последовательных приближений*

$$A_{треб} \geq \frac{N}{\varphi \cdot [\sigma]}. \quad (10.22)$$

Из приведенных выше выражений видно, что коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  центрально – сжатых стержней в конечном итоге зависит от площади подбираемого сечения, поэтому *подбор размеров поперечного сечения стержня осуществляется методом последовательных приближений*.

Суть этого метода заключается в том, что в первом приближении задается значение  $\varphi_1$  (удобно принимать  $\varphi_1 = 0,5$ , в середине диапазона, так как он

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

изменяется в пределах  $0 < \varphi \leq 1$ ).

После этого по формуле (10.22) определяют  $A_1^{\text{треб}}$ , по найденному значению  $A_1^{\text{треб}}$  затем вычисляют  $J_{\min}$ ,  $i_{\min}$ ,  $\lambda_1$  и по таблице устанавливают фактическое значение  $\varphi_1$ .

При несовпадении  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$  для второго приближения принимают  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}$  и все повторяют до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$|\varphi_n - \varphi_n'| \leq 0,02.$$

Опыт показывает, что после выполнения этого неравенства расчет можно считать законченным. Уточнив (округлив) размеры сечения, необходимо обязательно сделать проверку выполнения условия устойчивости (10.21).

В каждом приближении, после получения значения площади  $A_n$ , для определения коэффициента продольного изгиба  $\varphi_n$  нам необходимо знать значение минимального радиуса инерции  $i_{\min}$ , поэтому для каждого подбираемого сечения полезно предварительно выразить  $i_{\min}$  через  $A$ .

Этот метод расчета универсален в том смысле, что не связан с пределами применимости формулы Эйлера и может быть использован при всех значениях гибкости, для которых имеются табличные значения коэффициента  $\varphi$ .

2. Определение допускаемой нагрузки. По известной площади  $A$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют величину допускаемой нагрузки

$$[N] = [F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A \quad (10.23)$$

По найденному значению продольной силы  $[N]$  определяется допускаемое значение внешних сил.

3. Проверочный расчет. По известным значениям  $F$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  и  $\varphi$  проверяют выполнение условия устойчивости (10.20)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]$$

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$[n]_{уст} = \frac{F_{кр}}{[F]} \quad (10.24)$$

**10.10. Контрольные вопросы для самопроверки по теме  
«Устойчивость центрально сжатых стержней»**

1. В чем заключается явление потери устойчивости центрально сжатого стержня?
2. Какое равновесное состояние гибкого центрально сжатого стержня является устойчивым, безразличным или неустойчивым?
3. Какая сила называется критической?
4. Запишите формулу Эйлера для определения критической силы.
5. Как определяется приведённая длина центрально сжатого стержня?
6. Запишите формулу Эйлера с учетом условий закрепления центрально сжатого стержня.
7. Что называется гибкостью стержня?
8. Что такое предельная гибкость центрально сжатого стержня?
9. Условия применимости формулы Эйлера?
10. Формула Ясинского. Условия её применимости?
11. Как записывается условие устойчивости центрально сжатого стержня и какие задачи решаются с помощью этого условия?
12. Как определяется коэффициент продольного изгиба и от чего он зависит?
13. Как определяется величина допускаемой нагрузки.
13. Что такое коэффициент запаса устойчивости?
15. Как подбирают сечение центрально сжатого стержня при расчете на устойчивость?

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

ТЕМА 11. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

11.1. Учет сил инерции. Коэффициент динамичности

В предыдущих темах мы рассматривали методы расчета на прочность только с учетом статических нагрузок. В действительности на сооружения и машины действуют не только статические, но и динамические силы. В большинстве своем это силы инерции, величина которых во много раз превышает статические силы.

В этих случаях вопрос о прочности нельзя решить, не принимая во внимание характер движения рассматриваемой части сооружения или машины.

Такие задачи сопротивления материалов, при решении которых учитываются динамические нагрузки, называются *динамическими*.

Динамическими нагрузками являются силы инерции деталей машин, движущихся возвратно–поступательно, центробежные силы вращающихся частей при пуске в ход и остановке машины и нагрузки, прикладываемые в течение весьма короткого промежутка времени (ударные нагрузки).

Существенной особенностью динамических нагрузок является большая скорость их приложения, в результате чего элементы, подвергающиеся действию таких нагрузок, получают значительные ускорения, влиянием которых на напряженно–деформированное состояние конструкции нельзя пренебречь, как это делается при рассмотрении действия статических нагрузок.

При этом, динамические напряжения существенно изменяют и сам процесс деформирования, в результате чего поведение тел при действии подобного рода напряжений оказывается отличным от поведения тел в случае действия статических напряжений.

Наличие ускорений связано с возникновением особого рода сил – *сил инерции*, величина которых определяется произведением массы элементарного объема тела на ускорение центра тяжести этого объема, а направление обратно



---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

направлению ускорения.

Силы инерции, так же как и собственный вес, представляют собой объемные силы, так как приложены к каждой элементарной частице объема тела.

При расчете стержневых систем объемные силы инерции заменяют силами инерции, распределенными по длине оси каждого стержня, то есть распределенной погонной инерционной нагрузкой.

Интенсивность распределенной погонной инерционной нагрузки выражается в н/м, кг/см и т.д.

В частности, при вращении тела с угловой скоростью  $\omega$  имеет место центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 \cdot r, \quad (11.1)$$

где

$a$  – центростремительное ускорение;

$\omega$  – угловая скорость вращения тела;

$r$  – радиус – вектор точки.

Следовательно, на любой элементарный объем вращающегося тела, имеющего массу  $dm$ , действует сила инерции (центробежная сила)

$$dS_{\text{и}} = dm \cdot \omega^2 \cdot r \quad (11.2)$$

Величина сил инерции при колебаниях зависит от частоты колебания и ее амплитуды. Когда частоты вынужденных и собственных колебаний совпадают, имеем явление резонанса, которое очень опасно для строительных конструкций.

Зная величину и направление этой силы, с помощью принципа Даламбера можно составить условие динамического равновесия, откуда определяются усилия, приложенные к граням рассматриваемого элемента и напряжения.

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Для упрощения решения задач динамики вводят так называемый коэффициент динамичности  $K_{дин}$ .

Для получения численных значений внутренних усилий, напряжений или перемещений от динамического воздействия нагрузок в расчетах динамическая нагрузка заменяется статической, а найденные от нее усилия, напряжения или перемещения умножаются на динамический коэффициент

$$S_{дин} = S_{стат} \cdot K_{дин} \quad (11.3)$$

Динамический коэффициент  $K_{дин}$  во многих случаях определяется аналитически, а в тех случаях, когда это сделать трудно, – экспериментально.

Значения этого коэффициента зависят от вида динамической нагрузки, от размеров, массы, жесткости сооружения и ряда других факторов.

#### 11.2. Учет сил инерции при равноускоренном движении груза

Рассмотрим равноускоренный подъем груза  $Q$ , подвешенного на стальном тросе площадью поперечного сечения  $A$ ; объемный вес материала троса равен  $\gamma$ ; груз поднимается с ускорением  $a$  см/сек<sup>2</sup> (рис.11.1).

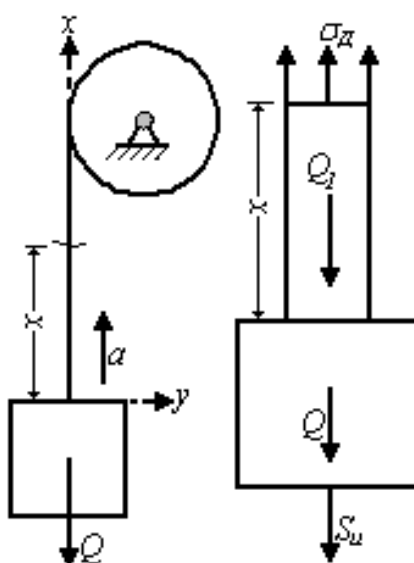


Рис.11.1

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Необходимо определить напряжение в произвольном сечении троса на расстоянии  $x$  от точки подвеса груза.

Отсекаем нижнюю часть и рассмотрим ее равновесие. Получаем

$$\sum x = 0. \rightarrow \sigma_d A - Q - Q_l - S_n = 0. \rightarrow \sigma_d A - Q - \gamma A x - \frac{Q + \gamma A x}{g} a = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_d = \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x + \frac{a}{g} \cdot \left( \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) = \left( \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot \left( 1 + \frac{a}{g} \right)$$

При статическом действии нагрузки ( $a = 0$ ) будем иметь

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x.$$

Тогда

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (11.4)$$

Обозначим

$$K_{дин} = 1 + \frac{a}{g} \quad (11.5)$$

где

$K_{дин}$  – динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза.

Тогда

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} \quad (11.6)$$

*Таким образом, напряжение от динамической нагрузки равно напряжению от статической нагрузки, умноженной на динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза.*

Динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза (11.4) зависит от величины ускорения  $a$ , с которым осуществляется подъем груза, поэтому динамические напряжения могут значительно превышать статические.

---

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Условие прочности по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_d \leq [\sigma] \quad (11.7)$$

или

$$\sigma_{ст} \leq \frac{[\sigma]}{K_d} \quad (11.8)$$

Учитывать влияние сил инерции приходится, в частности, при расчете сооружений, расположенных в местностях, подверженных землетрясениям.

При землетрясении земная поверхность и части сооружений, закрепленные в грунте, перемещаются с некоторыми ускорениями, в результате чего сооружения испытывают действие сил инерции. На эти силы должен быть произведен расчет сооружений. Расчетная величина наибольшего ускорения движения земной поверхности устанавливается специальными техническими условиями в зависимости от силы землетрясения (характеризуемой в баллах); эта величина может достигать 1 м/сек<sup>2</sup> и более.

### 11.3. Действие ударной нагрузки

Частным случаем динамической нагрузки является ударная нагрузка, которая наиболее опасна для прочности конструкции.

Под ударом понимают взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени. Время удара очень мало, а сила удара достигает большой величины (удар падающего груза при забивке свай и т.д.).

Задача определения напряжений при ударе в общем виде представляет значительные трудности, *поэтому в инженерных расчетах эту задачу решают с применением приближенной теории удара*, используя следующие предположения:

1. Напряжения от ударной нагрузки будем определять в стержнях, размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с длиной.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

2. При определении напряжений будем пренебрегать массой стержня, а следовательно, и его силами инерции.

3. Силу, приложенную в месте удара, будем считать пропорциональной деформации, допуская, что напряжения при ударе не превышают пределов упругости.

Для стержней, в зависимости от направления удара по отношению к оси стержня и характера происходящих деформаций, различают продольный удар и поперечный (изгибающий) удар.

11.3.1. Продольный удар

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом  $G$  падает с высоты  $h$  на неподвижный стержень (рис. 11.2).

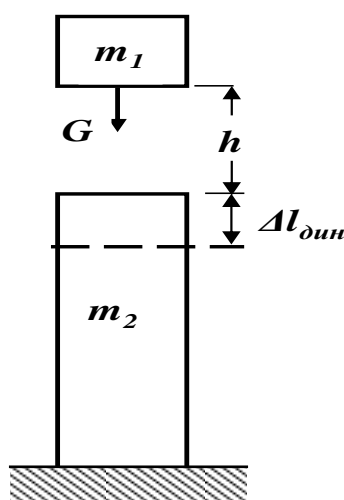


Рис. 11.2

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения

$$v = \sqrt{2gh} \quad (11.9)$$

Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Благодаря большой величине ускорения (замедления) возникает значительная сила инерции, величиной которой и определяется действие удара.

Однако теоретически трудно установить закон изменения скорости, а, следовательно, и величину силы инерции. Здесь применяется другой путь, основанный на законе сохранения энергии и на следующих допущениях:

1. Напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе сохраняет свою силу.

2. Тела после удара не отделяются друг от друга, то есть удар считается не упругим.

3. Масса неподвижного стержня  $m_2$  считается малой по сравнению с массой ударяющего тела  $m_1$ , поэтому в расчет не принимается.

4. Потерей части энергии, перешедшей в теплоту и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня.

Работа, совершаемая весом падающего груза, будет равна

$$W = G(h + \Delta l_{\text{дин}}), \quad (11.10)$$

где

$\Delta l_{\text{дин}}$  – перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии равна

$$U = \Delta l_{\text{дин}}^2 \frac{EA}{2l} \quad (11.11)$$

Из этих двух уравнений (11.10) и (11.11) получаем

$$G(h + \Delta l_{\text{дин}}) = \Delta l_{\text{дин}}^2 \cdot \frac{EA}{2l},$$

или

$$\Delta l_{\text{дин}}^2 EA - 2Gl\Delta l_{\text{дин}} - 2Ghl = 0$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Разделив все члены этого уравнения на жесткость стержня  $E \cdot A$ , получим

$$\Delta l_{дин}^2 - 2 \frac{Gl}{EA} \Delta l_{дин} - 2 \frac{Gl}{EA} h = 0.$$

В этом уравнении в соответствии с(3.9) величина

$$G \cdot l / E \cdot A = \Delta l_{см},$$

где

$\Delta l_{см}$  – абсолютное укорочение стержня от статически приложенной нагрузки  $G$ .

Тогда

$$\Delta l_{дин}^2 - 2\Delta l_{см}\Delta l_{дин} - 2\Delta l_{см}h = 0 \quad (11.12)$$

Решив это квадратное уравнение относительно  $\Delta l_{дин}$ , получим

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{см} \pm \sqrt{\Delta l_{см}^2 + 2h\Delta l_{см}} \quad (11.13)$$

Оставляя знак плюс, (решение со знаком минус перед радикалом противоречит физическому смыслу задачи), получаем окончательно

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{см} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{см}}} \right) = \Delta l_{см} K_{дин}, \quad (11.14)$$

где

$K_{дин}$  - динамический коэффициент при продольном ударе, равный

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{стат}}} \right) \quad (11.15)$$

Разделив обе части последнего уравнения (11.14) на длину стержня и умножив на модуль упругости  $E$ , перейдем, на основании закона Гука, от деформаций к напряжениям

$$\sigma_{дин} = \sigma_{см} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{см}}} \right) = \sigma_{см} K_{дин} \quad (11.16)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Из этих формул (11.14) и (11.16) видно, что величины динамического перемещения и напряжения зависят от величины статической деформации  $\Delta l_{ст}$  ударяемого тела.

Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения. Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

Если в формулу (11.15) для вычисления динамического коэффициента  $K_{дин}$  при продольном ударе вместо  $2h$  подставить равное ему  $\frac{v^2}{g}$ , то получим, что

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta l_{стат}}} \right) \quad (11.17)$$

Частные случаи продольного удара:

1. Рассмотрим случай, когда высота падения груза равна нулю, то есть  $h = 0$ . Такой случай носит название *внезапного приложения нагрузки*.

Он имеет место, например, при внезапном обрыве троса, когда груз опущен до соприкосновения с опорами или при «раскружливании» железобетонного перекрытия, когда стойки опалубки убираются мгновенно, например, ударом.

Тогда при  $h = 0$  из формулы (11.15) имеем

$$K_{дин} = 2.$$

Следовательно,

$$\Delta l_{дин} = 2\Delta l_{ст}; \rightarrow \sigma_{дин} = 2\sigma_{ст} \quad (11.18)$$

*При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.*

2. Если высота падения  $h$  значительно больше статической деформации  $\Delta l_{ст}$  ( $h \gg \Delta l_{ст}$ ), то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \quad (11.19)$$

*При сжимающем ударе, во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений.*

**11.3.2. Поперечный (изгибающий) удар**

Аналогичный вид имеют формулы и для случая поперечного (изгибающего) удара, только в этом случае вместо  $\Delta l_{ст}$  следует принимать статический прогиб балки в месте удара  $f_{ст}$ , а вместо  $\Delta l_{дин}$  динамический прогиб  $f_{дин}$ .

Рассмотрим балку на двух опорах, подвергающуюся действию груза  $G$ , который падает с высоты  $h$  на середину пролета (рис. 11.3).

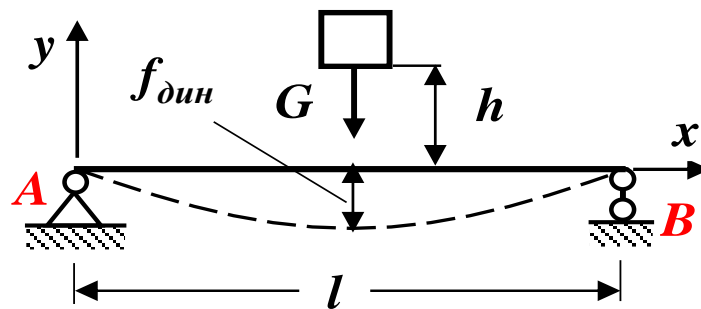


Рис. 11.3

Определим величину  $f_{дин}$  динамического прогиба балки.

Так же, как и при растягивающем ударе, считаем, что работа падающего груза превращается в потенциальную энергию изогнутой балки.

Потенциальная энергия изогнутой балки соответствует работе силы  $F$ , которая возрастает от  $0$  до своего конечного значения на данном перемещении, то есть

$$U = \frac{F \cdot f_{дин}}{2}. \quad (11.20)$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Здесь

$F$  – сила, которая будучи приложенная статически, вызовет прогиб балки, по величине равный  $f_{дин}$ .

Как известно, величину прогиба в середине балки от сосредоточенной силы, действующей на середину пролета, можно вычислить по табличной формуле (см. справочные таблицы)

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{48EI_z} \quad (11.21)$$

Из выражения (11.21) определим величину силы  $F$

$$F = \frac{48EI_z}{\ell^3} \cdot f_{дин} \quad (11.22)$$

Следовательно, потенциальная энергия  $U$  изогнутой балки будет равна

$$U = \frac{24EI_z}{\ell^3} \cdot f_{дин}^2 \quad (11.23)$$

Работа груза  $G$  при падении с высоты  $h$  будет равняться

$$G \cdot (h + f_{дин})$$

Приравнявая потенциальную энергию изогнутой балки к работе груза при его падении, найдем

$$\frac{24EI_z}{\ell^3} \cdot f_{дин}^2 = G \cdot (h + f_{дин})$$

Отсюда получим квадратное уравнение для определения  $f_{дин}$

$$f_{дин}^2 = \frac{G \cdot \ell^3}{24EI_z} \cdot f_{дин} - \frac{G \cdot \ell^3}{24EI_z} \cdot h = 0 \quad (11.24)$$

Из уравнения (11.24) находим, что

$$f_{дин} = \frac{G \cdot \ell^2}{48EI_z} + \sqrt{\left(\frac{G \cdot \ell^3}{48EI_z}\right)^2 + \frac{G \cdot \ell^3}{48EI_z} \cdot 2h} \quad (11.25)$$

или

$$f_{дин} = f_{ст} + \sqrt{f_{ст}^2 + 2f_{ст} \cdot h}$$

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

Таким образом,

$$f_{дин} = f_{ст} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ст}}} \right) = f_{ст} \cdot K_{дин} \quad (11.26)$$

где

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ст}}} \right) \quad (11.27)$$

Аналогично, как и для продольного удара, можно рассмотреть случаи внезапного приложения нагрузки при  $h = 0$  и при очень большом значении  $h$ .

Частные случаи поперечного (изгибающего) удара:

1. Рассмотрим случай, когда высота падения груза равна нулю, то есть  $h = 0$ . Такой случай носит название *внезапного приложения нагрузки*.

Тогда при  $h = 0$  из формулы (11.27) имеем  $K_{дин} = 2$ .

Следовательно,

$$f_{дин} = 2 f_{ст}; \rightarrow \sigma_{дин} = 2 \sigma_{ст} \quad (11.28)$$

*При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.*

2. Если высота падения  $h$  значительно больше статической деформации  $f_{ст}$  ( $h \gg \Delta l_{ст}$ ), то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ст}}} \right) \approx \sqrt{\frac{2h}{f_{ст}}} \quad (11.29)$$

Из полученных выше формул видно, что чем больше статическая деформация упругой системы, тем меньше динамический коэффициент.

При статическом действии нагрузки напряжения в системе не зависят от модуля упругости материала, а при ударном – зависят, так как величина деформации обратно пропорциональна модулю упругости.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)

**11.4. Контрольные вопросы для самопроверки по теме  
«Динамическое действие нагрузок»**

1. В чем заключаются общие принципы расчета элементов конструкции на динамическое воздействие нагрузок?
2. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза?
3. Какие допущения (гипотезы) приняты при расчете элементов конструкции на ударную нагрузку?
4. Какой удар называется продольным?
5. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при продольном ударе?
6. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент, если высота падения груза  $h$  значительно больше статической деформации, при продольном ударе?
7. Чему равен динамический коэффициент при внезапном приложении нагрузки при продольном ударе?
8. Какой удар называется поперечным (изгибающим)?
9. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при поперечном (изгибающем) ударе?
10. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент, если высота падения груза  $h$  значительно больше статической деформации, при поперечном (изгибающем) ударе?
11. Чему равен динамический коэффициент при внезапном приложении нагрузки при поперечном (изгибающем) ударе?

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ (Часть III)**

**Рекомендуемая литература**

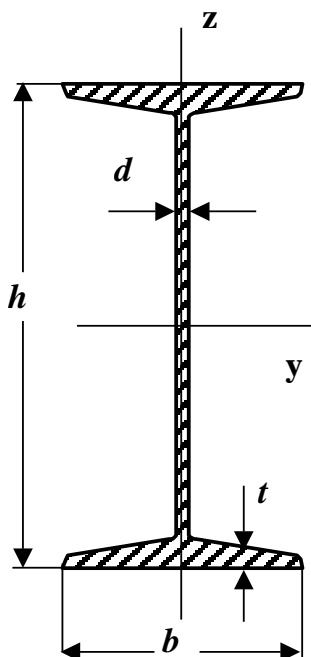
1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 251 с.
3. Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть I): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018.
4. . Еремин В.Д. Сопротивление материалов и техническая механика (Часть II): методическая разработка по подготовке студентов к промежуточной (итоговой) аттестации. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2018.
5. . Еремин В.Д., Стрельников Г.П. Определение внутренних усилий, напряжений и перемещений. Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах. – Ростов-на Дону: ДГТУ, 2019.
6. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010.– 323 с.
7. Варданян Г.С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г.С. Варданян, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА–М, 2011. – 480 с.
8. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 591 с.

**СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ**  
**для выполнения расчетно-графических, контрольных работ**  
**и проведения практических занятий**  
**по дисциплинам «Сопротивление материалов» и**  
**«Специальные вопросы сопротивления материалов»**

**Сортамент прокатной стали**  
**Двутавры стальные горячекатные**

**ГОСТ 8239-89**

№	<i>h</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>t</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	Масса 1 м, кг
10	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,2	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

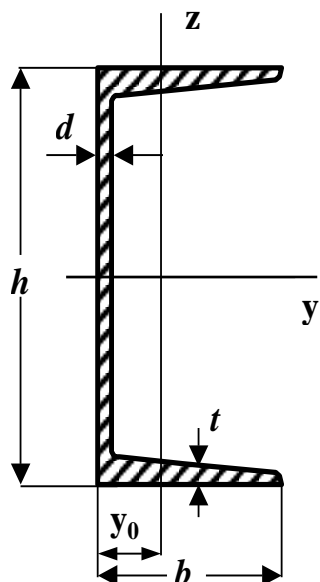


**Обозначения:**

*A*- площадь сечения ;  
*J*- момент инерции ;  
*i*- радиус инерции ;  
*W*- момент  
сопротивления ;  
*S*- статический момент  
полусечения .

## Швеллеры стальные горячекатаные

ГОСТ 8240-89



**Обозначения:**

*A*- площадь сечения;

*J*- момент инерции;

*i*- радиус инерции;

*W*- момент  
сопротивления;

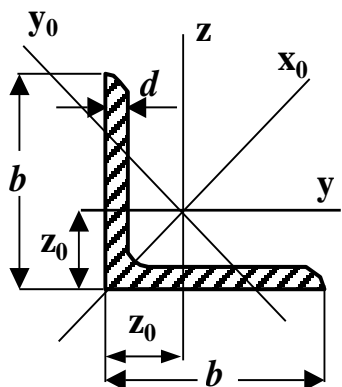
*S*- статический  
момент полусечения.

№	<i>h</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>t</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	<i>y<sub>0</sub></i> см	Масса 1 п.м. кг
5	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24	5,9
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8	14,2
16a	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,30	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3



## Уголки стальные горячекатные равнополочные

ГОСТ 8509-86



**Обозначения:**

*A*- площадь сечения;

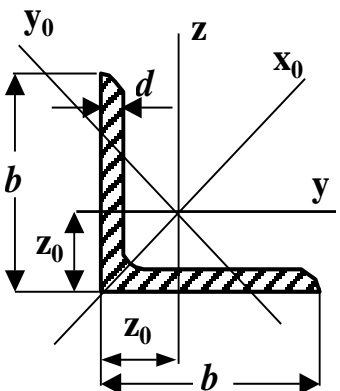
*J*- момент инерции;

*i*- радиус инерции.

<i>N</i>	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>xo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>xo</sub></i> см	<i>J<sub>yo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>yo</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>z<sub>0</sub></i> см
2	20	3	1,13	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
	20	4	1,46	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	25	4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,8
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
	30	4	2,27	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	32	4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	35	4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	35	5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,1	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	40	4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
	40	5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3	1,21
	45	4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	45	5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,3

*Продолжение*

$N_2$	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_{x_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ см	$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ см
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	50	4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	50	5	4,8	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	50	6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	56	5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	63	4	4,96	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	63	5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	63	6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78
7	70	4,5	6,2	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17	1,88
	70	5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
	70	6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
	70	7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
	70	8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,65	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	75	6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	75	7	10,15	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,47	31,2	2,1
	75	8	11,5	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	35	2,15
	75	9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	38,6	2,18



**Обозначения:**

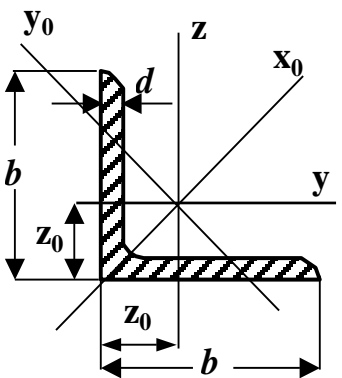
$A$ - площадь сечения;

$J$ - момент инерции;

$i$ - радиус инерции.

*Продолжение*

$N_0$	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_{x_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ см	$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ см
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	80	6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	80	7	10,85	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
	80	8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	43	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34,0	1,79	48,1	2,43
	90	7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	90	8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
	90	9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,89	50,7	1,99	71,4	2,68
	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	100	8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	100	10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	100	12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
	100	14	26,3	237	3	375	3,78	99,3	1,94	138	2,99
	100	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	152	3,06
11	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	110	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3



**Обозначения:**

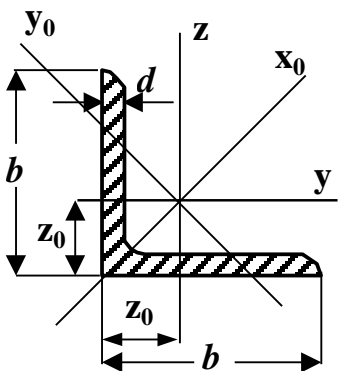
$A$ - площадь сечения;

$J$ - момент инерции;

$i$ - радиус инерции.

Продолжение

№	$b$ , мм	$d$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ , см	$J_{yz}$ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	125	9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	192	3,4
	125	10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	125	12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
	125	14	33,4	482	3,8	764	4,78	200	2,45	282	3,61
	125	16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	315	3,68
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	140	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	140	12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	160	11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	160	12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	160	14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	160	16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
	160	18	54,8	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
	160	20	60,4	1419	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
18	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	180	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89



Обозначения:

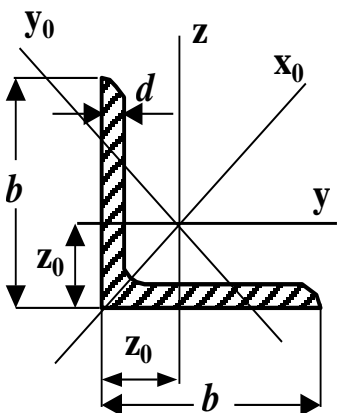
$A$  - площадь сечения;

$J$  - момент инерции;

$i$  - радиус инерции

*Окончание*

$N_2$	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_{x_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ см	$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ см
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
	200	13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
	200	14	54,6	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
	200	16	62	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	1393	5,54
	200	20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	1689	5,7
	200	25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
	200	30	111,5	4020	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,6	1159	4,38	1655	5,91
	220	16	68,6	3175	6,8	5045	8,58	1306	4,36	1869	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
	250	18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	3089	6,83
	250	20	97	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91
	250	22	106,1	6270	7,69	9962	9,69	2579	4,93	3691	7
	250	25	119,7	7006	7,65	11126	9,64	2887	4,91	4119	7,11
	250	28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,9	4527	7,23
	250	30	142	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	4788	7,31



**Обозначения:**

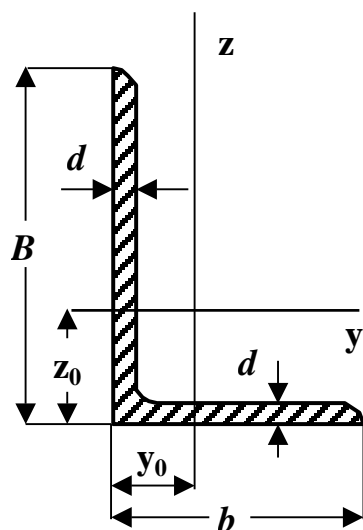
$A$ - площадь сечения;

$J$ - момент инерции;

$i$ - радиус инерции.

## Уголки стальные горячекатные неравнополочные

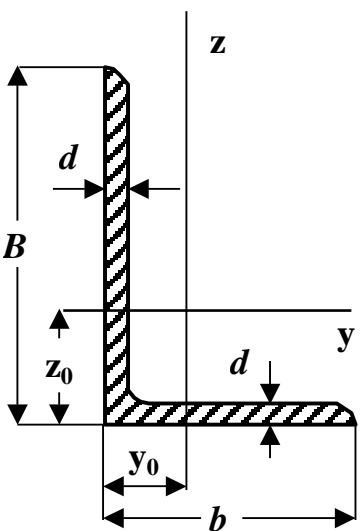
ГОСТ 8510-86



### Обозначения:

$A$  - площадь сечения;  
 $J$  - момент инерции;  
 $i$  - радиус инерции.

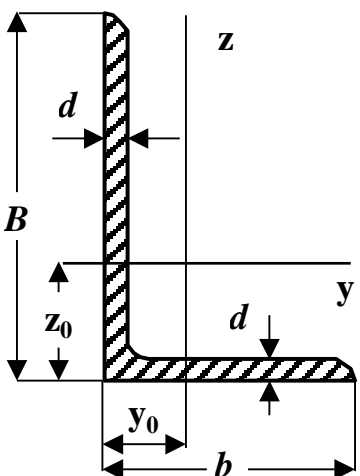
№	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_z$ см <sup>4</sup>	$i_z$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	$z_0$ см
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,7	0,78	0,22	0,44	0,22	0,42	0,86
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,47	0,49	1,08
	32	20	4	1,94	1,93	1	0,57	0,54	0,59	0,53	1,12
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,7	0,96	0,59	1,32
	40	25	4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	1,22	0,63	1,37
	40	25	5	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	1,44	0,66	1,41
4,5/28	45	28	3	2,14	4,41	1,48	1,32	0,79	1,38	0,64	1,47
	45	28	4	2,8	5,68	1,42	1,69	0,78	1,77	0,68	1,51
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,6	1,99	0,91	2,01	0,72	1,6
	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,9	2,59	0,76	1,65
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	3,74	0,84	1,82
	56	36	5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	4,5	0,88	1,87
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	5,25	0,91	2,03
	63	40	5	4,98	19,9	2	6,26	1,12	6,41	0,95	2,08
	63	40	6	5,9	23,3	1,99	7,29	1,11	7,44	0,99	2,12
	63	40	8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	9,27	1,07	2,2
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	9,12	1,05	2,28
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	12	1,17	2,39
	75	50	6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	14,1	1,21	2,44
	75	50	8	9,47	52,4	2,35	18,55	1,4	17,8	1,29	2,52



**Обозначения:**  
 $A$  - площадь сечения ;  
 $J$  - момент инерции ;  
 $i$  - радиус инерции .

*Продолжение*

$N_2$	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_z$ см <sup>4</sup>	$i_z$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$y_o$ см	$z_o$ см
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	13,2	1,13	2,6
	80	50	6	7,55	49,0	2,55	14,85	1,4	15,5	1,17	2,65
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	20,54	1,26	2,92
	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	22,23	1,28	2,95
	90	56	8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	28,33	1,36	3,04
10/6,3	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	31,5	1,42	3,23
	100	63	7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	36,1	1,46	3,28
	100	63	8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	40,5	1,5	3,32
	100	63	10	15,5	154	3,15	47,2	1,75	48,6	1,58	3,4
11/7	110	70	6,5	11,45	142	3,53	45,6	2	46,8	1,58	3,55
	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	55,9	1,64	3,61
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	74,7	1,8	4,01
	125	80	8	16,0	256	4	83,0	2,28	84,1	1,84	4,05
	125	80	10	19,7	312	3,98	100	2,26	102	1,92	4,14
	125	80	12	23,4	365	3,95	117	2,24	118	2	4,22
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	121	2,03	4,49
	140	90	10	22,2	444	4,47	146	2,58	147	2,12	4,58
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	194	2,24	5,19
	160	100	10	25,3	667	5,13	204	2,84	213	2,28	5,23
	160	100	12	30,0	784	5,11	239	2,82	249	2,36	5,32
	160	100	14	34,7	897	5,08	272	2,8	282	2,43	5,4



*Окончание*

<i>№</i>	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>y<sub>o</sub></i> см	<i>z<sub>o</sub></i> см
18/11	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	295	2,44	5,88
	180	110	12	33,7	1123	5,77	324	3,1	348	2,52	5,97
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	465	2,79	6,5
	200	125	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	503	2,83	6,54
	200	125	14	43,9	1801	6,41	551	3,54	575	2,91	6,62
	200	125	16	49,8	2026	6,38	617	3,52	643	2,99	6,71
25/16	250	160	16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	1351	3,69	8,14

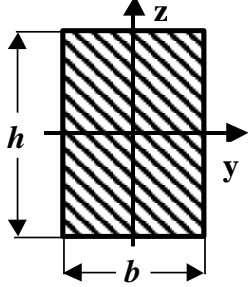
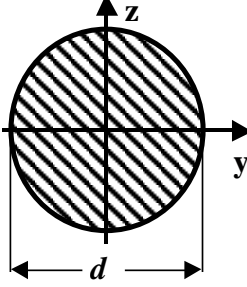
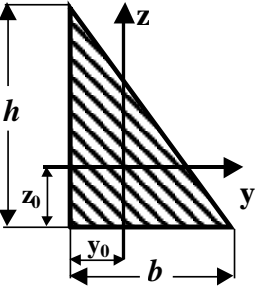
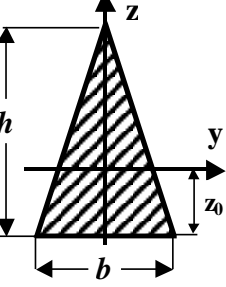
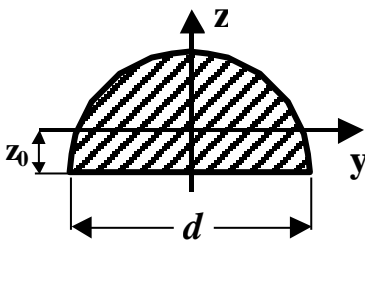
*Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и  
внесистемными единицами*

$1\text{ м} = 10^2\text{ см}$	$1\text{ см} = 10^{-2}\text{ м}$	$1\text{ Н} = 10^{-3}\text{ кН}$	$1\text{ кН} = 10^3\text{ Н}$	$1\text{ Па} = 1\text{ Н/м}^2$
$1\text{ м}^2 = 10^4\text{ см}^2$	$1\text{ см}^2 = 10^{-4}\text{ м}^2$	$1\text{ Н} = 10^{-6}\text{ МН}$	$1\text{ МН} = 10^3\text{ кН}$	$1\text{ кПа} = 1\text{ кН/м}^2$
$1\text{ м}^3 = 10^6\text{ см}^3$	$1\text{ см}^3 = 10^{-6}\text{ м}^3$	$1\text{ кН} = 10^{-3}\text{ МН}$	$1\text{ МН} = 10^6\text{ Н}$	$1\text{ МПа} = 1\text{ МН/м}^2$
$1\text{ м}^4 = 10^8\text{ см}^4$	$1\text{ см}^4 = 10^{-8}\text{ м}^4$	$1\text{ т} = 10\text{ кН}$	$1\text{ кг} = 10\text{ Н}$	$1\text{ МН} = 100\text{ т}$

$1\text{ кПа} = 10^3\text{ Па}$	$1\text{ кПа} = 10^{-3}\text{ МПа}$	$1\text{ МПа} = 10^3\text{ кПа}$	$1\text{ МПа} = 10\text{ кг/см}^2$	$1\text{ кН/см}^2 = 10\text{ МПа}$
---------------------------------	-------------------------------------	----------------------------------	------------------------------------	------------------------------------



Таблица моментов инерции и моментов сопротивления простейших фигур

				
$A = bh$	$A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2$	$y_0 = \frac{b}{3} \quad z_0 = \frac{h}{3}$	$z_0 = \frac{h}{3}$	$z_0 = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d$
$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad J_z = \frac{b^3h}{12}$	$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,393d^2$
$J_{yz} = 0$	$J_{yz} = 0$	$J_y = \frac{bh^3}{36}$	$J_y = \frac{bh^3}{36}$	$J_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00687d^4$
$W_y = \frac{bh^2}{6}$	$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$	$J_z = \frac{b^3h}{36}$	$J_z = \frac{b^3h}{48}$	$J_z = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,0245d^4$
$W_z = \frac{b^2h}{6}$	$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$	$J_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$J_{yz} = 0$	$J_{yz} = 0$

**Обозначения:**

$y, z$  – центральные оси;

$J_y, J_z$  – осевые моменты инерции;

$W_y, W_z$  – осевые моменты сопротивления;

$A$  – площадь фигуры;

$J_{yz}$  – центробежный момент инерции;

$W_\rho$  – полярный момент сопротивления;

$J_\rho$  – полярный момент инерции.

**Таблица коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов**

Материал	Гибкость $\lambda$															
	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Ст. 2,3 (сталь)	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23
Дерево	0,93	0,87	0,8	0,71	0,61	0,47	0,37	0,30	0,25	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09

**Примечание:** Значения  $\varphi$  для дерева определены в соответствии со СНиП II-25-80 по формулам

$$\varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \text{ если } \lambda \leq 70; \quad \varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \text{ если } \lambda > 70. \quad \text{Где } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} - \text{гибкость стержня};$$

$\mu$  – коэффициент приведения длины стержня;  $l$  – длина стержня;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции.

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов, используемых в формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_{пред}$
Сталь	310	1,14	100
Дерево	40	0,203	70

$\lambda_{пред}$  – предельная гибкость стержня

## Механические характеристики материалов

Сталь				Медь		Чугун	Дерево
ЕМПА	ГМПА	$\alpha$ 1/град	$\gamma$ кН/м <sup>3</sup>	ЕМПА	$\alpha$ 1/град	ЕМПА	ЕМПА
$2,06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78	$0,98 \cdot 10^5$	$165 \cdot 10^{-7}$	$1,18 \cdot 10^5$	$0,98 \cdot 10^4$

**Обозначения:**  $E$  – модуль упругости при растяжении;

$G$  – модуль упругости при сдвиге;

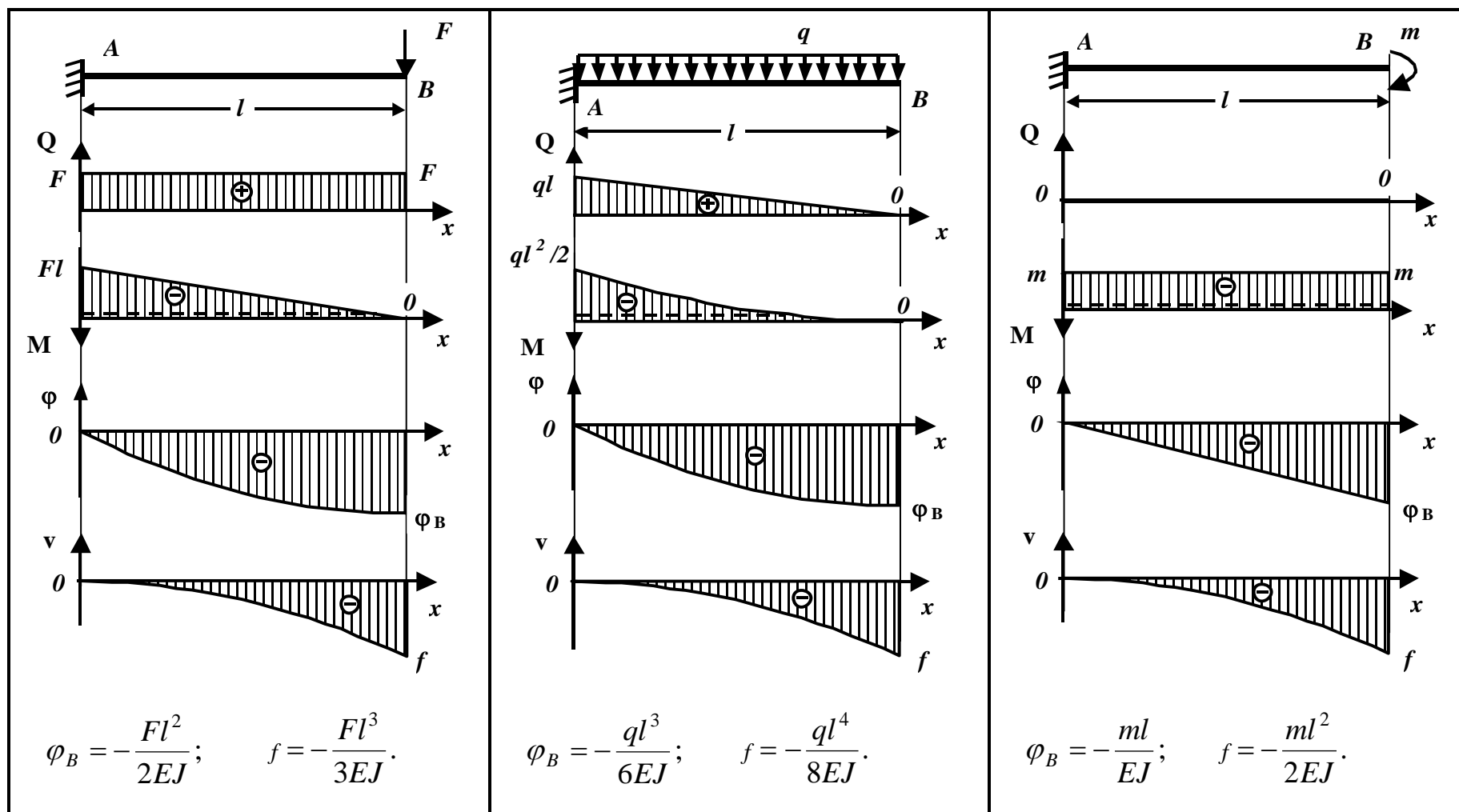
$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\gamma$  – объемный вес;

$\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

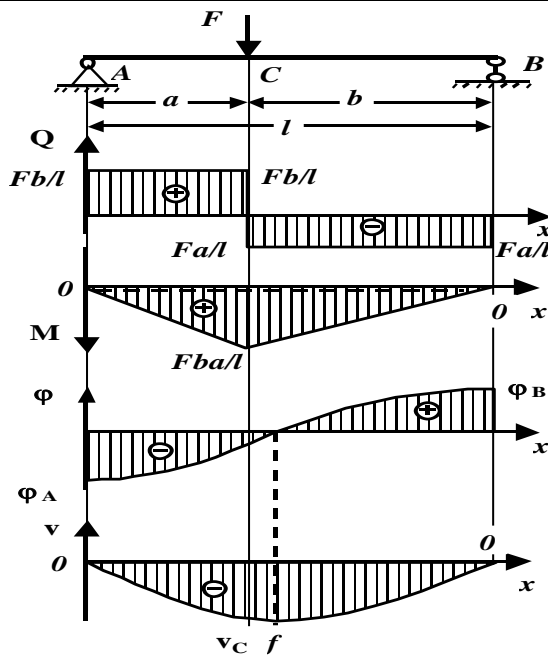
Эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$ , прогибов  $v$  и углов поворота  $\varphi$



**Обозначения:**

$\varphi$  - угол поворота поперечного сечения;  $v$  - прогиб;  $f$  - стрела прогиба (максимальный прогиб).

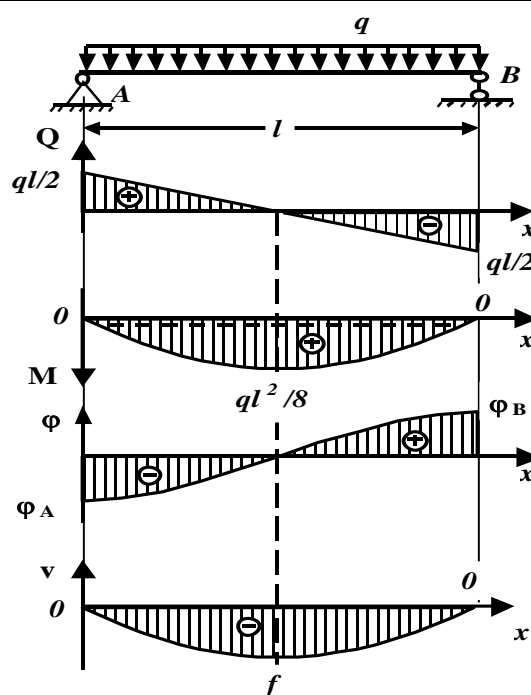
Окончание



$$\varphi_A = -\frac{Fba}{6EJl}(a+2b); \varphi_B = \frac{Fa}{6EJl}(l^2 - a^2);$$

$$v_C = -\frac{F}{3EJ} \frac{(ab)^2}{l}, \text{ при } x = a;$$

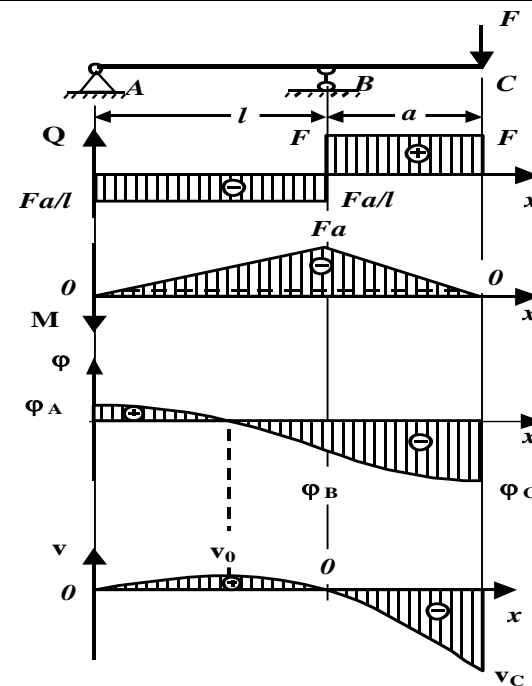
$$f = v_C = -\frac{Fl^3}{48EJ}, \text{ при } x = a = b = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{24EJ}; \quad \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ};$$

$$f = -\frac{5ql^4}{384EJ},$$

$$\text{При } x = \frac{l}{2}.$$



$$\varphi_A = \frac{Fal}{6EJ}; \quad \varphi_C = -\frac{Fa}{6EJ}(2l+3a);$$

$$v_0 = 0,0642 \frac{Fal^2}{EJ}, \text{ при } x = 0,578l$$

$$v_C = -\frac{Fa^2}{3EJ}(l+a); \quad \varphi_B = -\frac{Fal}{3EJ}.$$